

厚圆盘弯曲振动研究*

潘晓娟 贺西平†

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

(2010 年 1 月 23 日收到; 2010 年 2 月 2 日收到修改稿)

当厚跨比大于五分之一时, 研究板弯曲振动中的剪切应力及由此引起的剪切、扭转变形等就不能忽略, 经典的薄板理论将失效. 从声学应用的角度, 基于 Mindlin 板理论, 本文推导了厚圆盘弯曲振动径向位移和横向位移的解析表达式, 并得到了自由、简支、固定边界条件下的频率方程. 解析方法计算得到的前几阶振型对应的频率与有限元方法计算的结果基本相符, 与实验测试结果基本一致. 本文的结果对厚圆盘弯曲振动辐射器的设计提供了理论参考.

关键词: 厚圆盘, 弯曲振动, 频率方程

PACC: 4325, 4380

1. 引言

弯曲振动圆盘具有大辐射面积特点在空气超声中得到了广泛的应用^[1-3]. 在高频、大功率声辐射条件下, 薄盘的机械强度显得不足, 这时厚圆盘是个不错的选择, 因为它横向尺寸不大, 频率又高. 对圆盘的弯曲振动特性及其辐射声场的研究, 目前大都采用薄板理论, 即基于 Kirchhoff “直线法” 假定^[4]. 该假定忽略了剪切变形, 提高了板的刚度, 所以得到的频率总是高于它的实际值. 该理论主要适用于厚跨比较小的匀质结构, 当厚跨比逐渐增大时 (大于 1/5 时), 经典薄板弯曲理论的局限性将会明显显示出来. 对于厚跨比较大的板, 必须重新探讨和研究经典理论的基本假定, 并建立相应的新的理论即厚板理论, 考虑剪切、挤压和转动惯量的效应. 从工程力学角度研究, 目前对于厚板理论, 最为著名的是 Reissner 板理论和 Mindlin 板理论^[5-9], 也就是所谓的一次剪切变形理论. 考虑横向剪切变形使得原来垂直于中面的法线变形后不再与中面垂直, 且发生屈曲. 文献[10—15] 基于上述理论也从工程力学的角度做了研究.

大功率的声学应用不但关心厚圆盘的结构振动特性, 还希望在一定的边界条件下, 能给出其相应的频率方程、位移解析解, 以利于设计和计算声

场. 本文完成了这一工作即在不同的边界条件下, 基于 Mindlin 板理论, 推导了厚圆盘弯曲振动径向位移和横向位移的解析式, 得到了厚圆盘的频率方程. 由频率方程计算得到的前几阶弯曲振动频率与用有限元方法计算的结果基本相符, 并与实验测试结果也基本一致. 本文的工作对厚圆盘弯曲振动辐射器的设计提供了参考.

2. 厚圆盘弯曲振动

2.1. Mindlin 厚板理论

盘的半径与厚度分别设为 a 和 h , 上下表面均不受切向力作用. 取柱坐标系 (r, θ, z) 的原点与盘中面的中心重合, u_r, u_θ, w 分别表示盘质点径向、切向、 z 向的位移分量. Mindlin 板理论考虑横向剪切变形和转动惯量的影响, 质点位移有如下形式

$$u_r = z\psi_r(r, \theta, t), \quad u_\theta = z\psi_\theta(r, \theta, t), \quad \bar{w}(r, \theta, t), \quad (1)$$

$$\begin{cases} \psi_r = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \psi_\theta = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{w}_1}{r \partial \theta} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{w}_2}{r \partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial r}, \\ \bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2. \end{cases} \quad (2)$$

* 国家自然科学基金 (批准号 10874107) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: hexiping@snnu.edu.cn

位移函数 $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ 和 H 分别满足

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \delta_1^2)\bar{w}_1 &= 0, \quad (\nabla^2 + \delta_2^2)\bar{w}_2 = 0, \\ (\nabla^2 + P^2)H &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\delta_1^2, \delta_2^2 = \frac{1}{2}\delta_0^4\{R + S \pm [(R - S)^2 + 4\delta_0^4]^{1/2}\}$,

$$\sigma_1, \sigma_2 = (\delta_1^2, \delta_2^2)(R\delta_0^4 - S^{-1})^{-1}, P^2 = \frac{2(R\delta_0^4 - S^{-1})}{(1 - \nu)}$$

. 式中 $R = h^2/12, S = D/k^2 Gh, \delta_0^4 = \rho\omega^2 h/D, D = Eh^3/12(1 - \nu^2), k^2 = \pi/12, \rho, \omega$ 和 D 分别为厚圆盘的密度、角频率和弯曲刚度常数, R 和 S 分别表示转动惯量和横向剪切变形的影响.

弯矩 M_r, M_θ , 扭矩 $M_{r\theta}$, 以及横向剪力 Q_r, Q_θ 的表达式为

$$\begin{aligned} M_r &= D\left[\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)\right], \\ M_\theta &= D\left[\frac{1}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right) + \nu\frac{\partial\psi_r}{\partial r}\right], \\ M_{r\theta} &= \frac{D}{2}(1 - \nu)\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \psi_\theta\right) + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}\right], \quad (4) \\ Q_r &= k^2 Gh\left(\psi_r + \frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right), \\ Q_\theta &= k^2 Gh\left(\psi_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right). \end{aligned}$$

2.2. 厚圆盘弯曲振动频率方程

对于圆盘,圆盘所受的力是对称于 z 轴的,圆盘的弯曲也是对称于 z 轴的,即为轴对称的弯曲振动,可不考虑 θ 方向上的位移

$$u_r = z\psi_r(r, t), u_\theta = 0, \quad \bar{w} = \bar{w}(r, t), \quad (5)$$

$$\psi_r = (\sigma_1 - 1)\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1)\frac{\partial\bar{w}_2}{\partial r}, \quad (6a)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2, \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} M_r &= D\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\psi_r\right), \\ Q_r &= k^2 Gh\left(\psi_r + \frac{\partial\bar{w}}{\partial r}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

方程(3)式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\bar{w}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial r} + \delta_1^2\bar{w}_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2\bar{w}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{w}_2}{\partial r} + \delta_2^2\bar{w}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

解(8)式可得

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= A_1 J_0(\delta_1 r) + B_1 N_0(\delta_1 r), \\ \bar{w}_2 &= A_2 J_0(\delta_2 r) + B_2 N_0(\delta_2 r), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $J_0(\delta_1 r), J_0(\delta_2 r)$ 为零阶贝塞尔函数, $N_0(\delta_1 r), N_0(\delta_2 r)$ 为零阶诺伊曼函数, A_1, A_2, B_1, B_2 为待定常数,由厚圆盘的边界条件决定.

把(9)式代入(6a), (6b)式,得

$$\begin{aligned} \psi_r &= \delta_1(1 - \sigma_1)[A_1 J_1(\delta_1 r) + B_1 N_1(\delta_1 r)] \\ &\quad + \delta_2(1 - \sigma_2)[A_2 J_1(\delta_2 r) + B_2 N_1(\delta_2 r)], \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= A_1 J_0(\delta_1 r) + B_1 N_0(\delta_1 r) \\ &\quad + A_2 J_0(\delta_2 r) + B_2 N_0(\delta_2 r). \end{aligned} \quad (10b)$$

当 $r = 0$ 时, $\bar{w}$ 不能无限大,且由对称性可知 $u_r(0, z) = 0$, 只能 $B_1 = 0, B_2 = 0$.

因而(10a), (10b)式变为

$$\begin{aligned} \psi_r &= A_1 \delta_1(1 - \sigma_1)J_1(\delta_1 r) \\ &\quad + A_2 \delta_2(1 - \sigma_2)J_1(\delta_2 r), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{w} = A_1 J_0(\delta_1 r) + A_2 J_0(\delta_2 r). \quad (12)$$

把(11), (12)式入(7)式,得

$$\begin{aligned} M_r &= A_1 \delta_1(1 - \sigma_1)\left[\delta_1 J_0(\delta_1 r) + \frac{\nu - 1}{r}J_1(\delta_1 r)\right] \\ &\quad + A_2 \delta_2(1 - \sigma_2)\left[\delta_2 J_0(\delta_2 r) + \frac{\nu - 1}{r}J_1(\delta_2 r)\right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$Q_r = -[A_1 \delta_1 J_1(\delta_1 r) + A_2 \delta_2 J_1(\delta_2 r)]. \quad (14)$$

2.2.1. 自由边界

自由边界条件下,圆盘边界处的弯矩和剪力为零,由(13), (14)式,得

$$\begin{aligned} A_1 \delta_1(1 - \sigma_1)\left[\delta_1 J_0(\delta_1 a) + \frac{\nu - 1}{a}J_1(\delta_1 a)\right] \\ + A_2 \delta_2(1 - \sigma_2)\left[\delta_2 J_0(\delta_2 a) + \frac{\nu - 1}{a}J_1(\delta_2 a)\right] &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$-[A_1 \delta_1 J_1(\delta_1 a) + A_2 \delta_2 J_1(\delta_2 a)] = 0. \quad (16)$$

由(15), (16)式得边界简支厚圆盘弯曲振动的共振频率方程为

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_2)\left[\delta_2 J_0(\delta_2 a) + \frac{\nu - 1}{a}J_1(\delta_2 a)\right] \\ = \frac{\sigma_2 J_1(\delta_2 a)}{\sigma_1 J_1(\delta_1 a)}(1 - \sigma_1)\left[\delta_1 J_0(\delta_1 a) + \frac{\nu - 1}{a}J_1(\delta_1 a)\right]. \end{aligned} \quad (17)$$

2.2.2. 简支边界

简支边界条件下,圆盘边界处的横向位移和弯矩为零,由(12), (13)式,得

$$A_1 J_0(\delta_1 a) + A_2 J_0(\delta_2 a) = 0, \quad (18)$$

$$A_1 \delta_1(1 - \sigma_1)\left[\delta_1 J_0(\delta_1 a) + \frac{\nu - 1}{a}J_1(\delta_1 a)\right]$$

$$+ A_2 \delta_2 (1 - \sigma_2) \left[\delta_2 J_0(\delta_2 a) + \frac{\nu - 1}{a} J_1(\delta_2 a) \right] = 0. \quad (19)$$

由(18), (19)式得边界简支厚圆盘弯曲振动的共振频率方程为

$$\frac{J_0(\delta_2 a)}{J_0(\delta_1 a)} \delta_1 (1 - \sigma_1) \left[\delta_1 J_0(\delta_1 a) + \frac{\nu - 1}{a} J_1(\delta_1 a) \right] = \delta_2 (1 - \sigma_2) \left[\delta_2 J_0(\delta_2 a) + \frac{\nu - 1}{a} J_1(\delta_2 a) \right]. \quad (20)$$

2.2.3. 固定边界

固定边界条件下, 圆盘边界处的横向位移及其导数等于零, 由(11), (12)式得

$$A_1 J_0(\delta_1 a) + A_2 J_0(\delta_2 a) = 0, \quad (21)$$

$$A_1 \delta_1 (1 - \sigma_1) J_1(\delta_1 a) + A_2 \delta_2 (1 - \sigma_2) J_1(\delta_2 a) = 0. \quad (22)$$

由(21), (22)式得边界固定厚圆盘弯曲振动的共振频率方程为

$$\delta_2 (1 - \sigma_2) J_1(\delta_2 a) - \frac{J_0(\delta_2 a)}{J_0(\delta_1 a)} \delta_1 (1 - \sigma_1) J_1(\delta_1 a) = 0. \quad (23)$$

3. 数值计算

为验证以上厚圆盘弯曲振动频率方程的解析

解, 这里利用有限元方法计算了固定、简支、自由边界条件下厚圆盘前三阶弯曲振型对应的频率. 取厚圆盘的材料为45#钢, 其密度为 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\nu = 0.28$, 弹性模量 $E = 21.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 剪切模量 $G = 8.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. 取其半径 $a = 25 \text{ mm}$, 厚度为 h (可变, 见下表1所示). 保持其半径不变, 三种边界条件下不同厚度圆盘弯曲振动的前三阶谐振频率结果列于表1. f_M 表示理论计算得到的各阶振型频率, f_A 表示有限元计算得到的频率, f_K 表示由薄板理论计算得到的频率, n 表示圆盘的振动模式.

从下表可可知, 厚圆盘理论计算出的谐振频率与有限元计算得到的谐振频率基本符合, 薄板理论计算出的谐振频率与有限元计算出的谐振频率相差比较大, 并且随着盘厚的增加, 相差越来越大. 且基频随着盘厚增加误差增大缓慢, 高阶频率随盘厚增加误差迅速增大. 说明随着厚跨比的增大, 薄板理论不适用. 且从表1中数值可以看出, 利用薄板理论计算出的基频的最大误差为44%, 二阶、三阶频率最大误差分别为109%, 173%, 而厚圆盘理论计算出的基频的最大误差仅为3%, 二阶、三阶频率最大误差则分别为5%, 9%.

以自由边界条件为例, 有限元方法模拟了厚度为8 mm的盘的相对横向位移分布曲线, 图1(a),

表1 弯曲厚圆盘共振频率的计算结果

<i>h</i> /mm	<i>n</i>	固定			自由			简支		
		<i>f_M</i> /Hz	<i>f_K</i> /Hz	<i>f_A</i> /Hz	<i>f_M</i> /Hz	<i>f_K</i> /Hz	<i>f_A</i> /Hz	<i>f_M</i> /Hz	<i>f_K</i> /Hz	<i>f_A</i> /Hz
8	1	26466	32932	27168	25412	28879	25644	14663	15813	14804
	2	76897	128028	80808	82249	123789	85380	67893	95732	70474
	3	135053	287240	145718	144238	282739	154153	130394	238981	139697
9	1	28536	37049	29155	27891	32489	28017	16245	17790	16340
	2	80367	144234	83565	86880	139262	89119	72234	107699	74249
	3	139261	323145	147294	148404	318082	155024	135676	268854	142500
10	1	30247	41165	31136	30056	36098	30332	17657	19767	17867
	2	83030	160260	87200	90457	154735	93635	75718	119665	78627
	3	142357	359050	153038	150590	353425	158795	139623	298727	149090
11	1	31815	45282	32743	32096	39708	32408	19054	21743	19297
	2	85216	176286	89474	97272	170210	96563	78701	131632	81787
	3	144635	394955	155390	150554	388767	157790	142568	328599	152236
12	1	33192	49398	34220	34006	43318	34348	20375	23720	20626
	2	87131	192312	91669	95535	185683	99081	81361	143598	84692
	3	146223	430859	157835	149400	424109	155705	145228	358473	159629

(b), (c) 分别为圆盘的第一阶、第二阶、第三阶振型.

图 2 为相应的各振型沿半径方向上的振幅分

布,图 2(a) 为有限元模拟得到的位移分布曲线, (b) 是由位移分布函数(12)式求解所得. 比较图 1(a) 与(b)可看出节点位置大致相同.

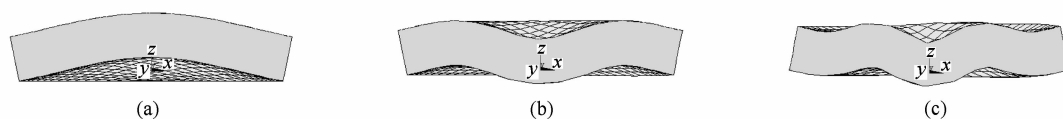


图 1 圆盘前三阶振型 (a) $n=1$; (b) $n=2$; (c) $n=3$

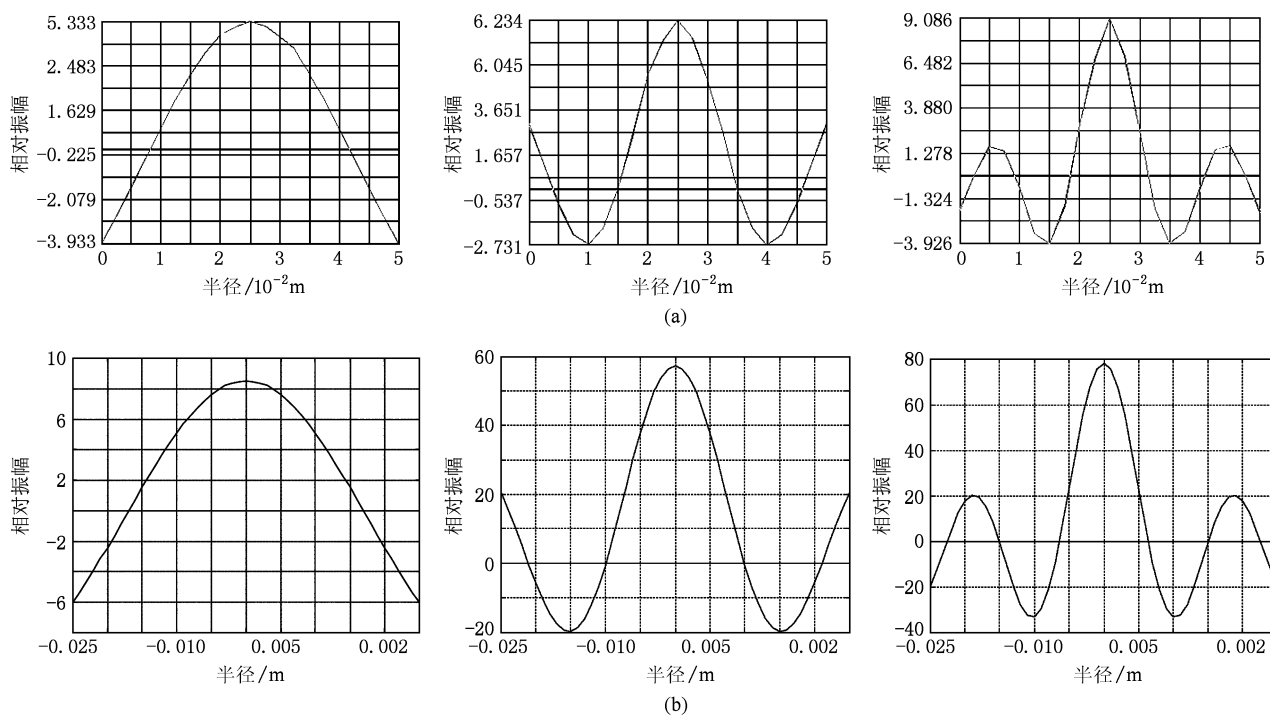


图 2 位移分布曲线 (a)有限元方法计算出的位移分布曲线; (b)厚圆盘理论计算出的位移分布曲线

4. 实 验

为了进一步验证厚圆盘理论的正确性,加工了两个材料为 45# 钢的厚圆盘,厚度分别为 $h=8\text{ mm}$,

$h=11\text{ mm}$,如图 3 所示. 测试了自由条件下的前三阶谐振频率. 测试原理框图如图 4 所示. 图中 T_1 和 T_2 分别是发射及接收压电换能器,发射和接收压电换能器的共振频率远离待测弯曲振动厚圆盘的共振频率. 在实验中,在保证信号发生器输出信号基



图 3 两种厚度的 45# 钢圆盘

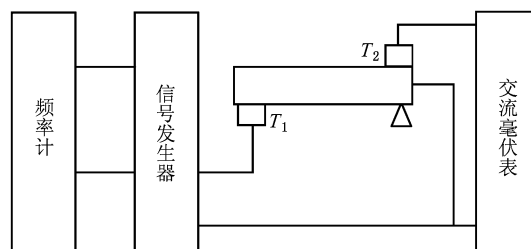


图 4 厚圆盘弯曲振动共振频率测试框

本不变的情况下,改变信号的频率,当接收换能器的输出达到最大时,对应的发生器输出信号的频率就是待测厚圆盘的共振频率. 测试结果如表 2 所示. 其中 n 表示圆盘的振动模式. 可以看出弯曲振动厚圆盘共振频率的计算值和测试值基本符合.

表 2 弯曲厚圆盘共振频率的测试结果

h/mm	8			11		
n	1	2	3	1	2	3
f/Hz	27770	82620	150815	30082	94540	155460

5. 结 论

当厚跨比逐渐增大时,经典弯曲薄板理论不再适用. 基于 Mindlin 板理论,本文推导了厚圆盘弯曲振动径向位移和横向位移的解析式,及自由、简支、固定边界条件下频率方程. 由频率方程计算得到的前三阶弯曲振动振型所对应的频率与用有限元方法计算的结果基本相符,与实验测试的基本一致. 本文研究对厚圆盘弯曲振动辐射器的设计提供了理论参考.

[1] Xie W J, Cao C D, Wei B B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 250 (in Chinese) [解文军、曹崇德、魏炳波 1999 物理学报 **48** 250]

[2] Gallego-Juárez J A, Rodríguez-Corral G, Riera-Franco de Sarabia E, Campos-Pozuelo C, Vázquez-Martínez F, Acosta-Aparicio V M 2000 *Ultrasonics*. **38** 331

[3] Robert Hickling, Marin S P 1986 *J. Acoust. Soc. Am.* **79** 1151

[4] Chen M X 2007 *Elasticity and Plasticity* (Beijing: Science Press) p115 (in Chinese) [陈明祥 2007 弹塑性力学 (北京: 科学出版社) 第 115 页]

[5] Mindlin R D 1951 *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)* **18** 31

[6] Mindlin R D, Deresiewicz H 1954 *J. Appl. Phys.* **25** 1329

[7] Reissner E 1944 *J. Math. Phys.* **23** 184

[8] Reissner E, Cambridge M 1945 *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)* **12** A69

[9] Reissner E 1947 *Quart. Appl. Math.* **5** 55

[10] Hu H C 1953 *Acta Phys. Sin.* **9** 130 (in Chinese) [胡海昌 1953 物理学报 **9** 130]

[11] Hu H C 1955 *Acta Phys. Sin.* **11** 19 (in Chinese) [胡海昌 1955 物理学报 **11** 19]

[12] Hu H C 1955 *Acta Phys. Sin.* **11** 231 (in Chinese) [胡海昌 1955 物理学报 **11** 231]

[13] Shi Z C, Li Y S 1981 *Acta Mathematicae Applicatae . Sinica.* **4** 53 (in Chinese) [石钟慈、李翊神 1981 应用数学学报 **4** 53]

[14] Xu X, He F B 1998 *Applied Mathematics and Mechanics.* **19** 577 (in Chinese) [徐 旭、何福保 1998 应用数学和力学 **19** 577]

[15] Song W M, Yang G S 1999 *Applied Mathematics and Mechanics.* **20** 181 (in Chinese) [宋卫明、杨光松 1999 应用数学和力学 **20** 181]

Analysis of flexural vibration thick disk^{*}

Pan Xiao-Juan He Xi-Ping[†]

(*Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

(Received 23 January 2010; revised manuscript received 2 February 2010)

Abstract

The flexural vibration of thick disk is studied in this paper. The general solutions of radial displacement and transverse displacement for flexural vibration thick disk under the Mindlin theory are derived. The resonance frequency equations are derived when the boundary conditions are free, simply supported and clamped, and The results obtained from the analytical method are in good agreement with those from the finite element method and also with the experimental results. These results can serve as reference for the design of flexural vibration thick disk radiator.

Keywords: thick disk, flexural vibration, frequency equation

PACC: 4325, 4380

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874107).

[†] Corresponding author. E-mail: hexiping@snnu.edu.cn