

二维成分无序颗粒体系中法向力的分布*

张兴刚 胡林†

(贵州大学理学院, 贵阳 550025)

(2011 年 8 月 12 日收到; 2011 年 9 月 28 日收到修改稿)

运用离散元法研究成分无序体系中法向力的几率分布, 该体系由两种不同刚度系数的颗粒规则堆积而成, 体系的无序程度由缺陷率控制. 模拟发现, 无缺陷时体系的力网几乎是均匀的, 而有缺陷时力网变得不均匀. 提出了主法向力与次法向力的概念, 并对它们分别进行统计; 随着缺陷率的增加, 主法向力的分布经历了比较复杂的变化过程, 而次法向力总是指数型分布. 模拟结果表明, 缺陷率较小时成分无序体系中的法向力分布与随机堆积体系很不相同, 而缺陷率较大时得到了与随机堆积类似的结果. 这些结果有助于理解力网的不均匀性与体系无序性的关系.

关键词: 静态颗粒体系, 离散元法模拟, 无序体系, 力分布

PACS: 45.70.-n, 45.70.Cc, 02.70.-c

1 引言

凝聚态体系的组成成分及几何结构对其物理性质有着非常重要影响, 比如晶体与非晶体就有很多不同. 在固体物理中, 有序系统通常指体系处于晶态, 组成体系的基本单元具有严格的空问平移对称性; 无序系统是指相对于理想晶体的偏离^[1]. 无序的形式有很多种, 如替位型点缺陷、间隙原子、位错、玻璃态等, 基本的形式是成分无序和结构无序. 成分无序是在周期性的点阵位置上随机分布着不同种的原子; 结构无序指体系不再是规则的点阵结构. 如果把颗粒物质看作凝聚态体系, 则静态颗粒体系一般处于结构无序(即随机堆积)的状态. 静态颗粒体系的几何及力学性质, 是颗粒物质研究中非常基本和重要的问题^[2]. 对于无序堆积的颗粒体系, 并非每个接触点的接触力都相同, 这可以直接从力网的不均匀性看到. 但很难完整地描述不规则的力网, 一个简单常用的方法是给出力分布 $p(f)$, 它用于描述体系中接触力的概率分布.

目前, 国内外许多学者对静态颗粒体系中的

力分布进行了比较深入的研究. 实验上, 有人用压痕法对重力作用下筒仓底面或侧面的力分布进行统计^[3,4], 也有人用光弹性法对二维圆盘体系中法向力及切向力的分布进行研究^[5]. 各种实验表明, 力在大于平均力时的几率密度按指数衰减, 但在接近或小于平均力时却没有一致的结论. Mueth 等^[4]所得到的 $p(f)$ 是单调减小的, 但 Majmudar 和 Behringer^[5]所得到的法向力分布在接近平均力处有一个峰值. 理论研究方面主要有两类模型, 一是将实际的颗粒堆积简化为格子系统, 再运用随机过程理论研究格子间力的传递, 如 q 模型^[3,6]、 α 模型^[7]等; 二是力网系综理论^[8-10], 它忽略掉颗粒体系的位形空间, 运用统计物理中系综的思想处理静态堆积中的力空间. 这些理论模型在一定程度上对力分布的规律做出了解释, 但仍有许多问题需要解决. 计算机模拟方面也主要有两种类型, 一是基于上面两种理论模型的 Monte Carlo 模拟^[6-9], 另一类是动力学模拟, 如分子动力学^[8]、接触动力学^[11]、离散元法 (discrete element method, 简记为 DEM)^[12-14]. 总结前人的工作, 已有的实验与动

* 贵州大学自然科学基金 (批准号: 2009011)、贵州省自然科学基金 (批准号: 2011-2103) 和贵州省长专项基金 (批准号: 2010-5) 资助的课题.

† E-mail: hulin53@sina.com

力学模拟主要针对结构无序的体系, 颗粒是随机堆积的. 虽然这样的体系更接近于实际当中的颗粒物质, 但结构的无序性会引入很多复杂因素, 这给力分布机理的研究带来了困难. 如果颗粒体系中只有成分无序, 没有结构无序, 将会比较简单些. 值得指出的是, 文献 [12] 用 DEM 模拟研究了带有点缺陷二维颗粒体系中的力分布, 由于模型中颗粒堆积结构是无序的, 因而体系是成分无序与结构无序的混合.

本文运用 DEM 模拟对二维颗粒体系中法向力的分布进行研究. 为了便于探讨力分布的机理, 首先利用等大圆盘按六角堆积方式产生结构有序的颗粒体系, 通过随机选取其中某些颗粒并且改变它们的刚度系数来构造成分无序体系, 这些颗粒可以看成是替位型点缺陷. 然后通过 DEM 模拟制备静态堆积的样本, 对颗粒间接触力的分布进行统计, 从而得出法向力分布与缺陷率等参数变化的关系.

$$\begin{cases} x_i = r_0 + 2r_0(i-1)\sin(30^\circ) & 1 \leq i \leq 2N+1, \quad 1 \leq j \leq 2M+1, \\ y_i = r_0 + 2r_0(j-1)\cos(30^\circ) & \text{且 } i, j \text{ 的奇偶性相同,} \end{cases} \quad (1)$$

称 (1) 式所确定的体系为 $M \times N$ 的体系, 颗粒总数 $N_0 = 2MN + M + N + 1$.

本文的 DEM 模拟中采用线性接触模型, 在接触点的法向和切向上引入了弹簧和阻尼器, 同时在切向上设定了滑动器. 模拟时采用线性的弹簧, 法向接触力由法向重叠量和法向刚度系数确定; 切向接触力 (摩擦力) 由切向累积位移和切向刚度系数确定, 同时要满足 Coulomb 摩擦定律; 引入阻尼器是为了耗散掉动能, 使体系最终达到静态. 表 1 给出了模拟过程中比较典型的计算参数. 进行模拟的时候, 首先利用 (1) 式产生图 1 所示的二维六角密堆积, 将颗粒的初速度设为 0. 接着以等概率的方式随机选取体系中的若干颗粒, 将它们的切向和法向刚度系数都变为原来的 λ 倍, 称这些颗粒为缺陷, 并且称 λ 为缺陷强度因子; 缺陷的数目由缺陷率 ε 控制, ε 是缺陷数目 N_d 与总颗粒数 N_0 的比值, 满足 $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$. 然后使顶部边界以可变化的速率 v_{top} 竖直向下运动, 此时每个颗粒都可以产生位移及形变, 从而负载 F 逐渐增加. 下压的过程中监测顶部颗粒的平均负载 $F/(N+1)$, 使其达到预

2 DEM 模型

DEM 是 Cundall 和 Strack^[15] 提出的, 目前它已发展成为研究颗粒体系静力学和动力学行为的强有力工具. 本文研究的成分无序体系由两种 ‘软硬’ 程度不同的圆盘规则堆积而成. 为此, 考虑 N_0 个圆盘形成的六角密堆结构, 如图 1 所示. 每个颗粒的半径为 r_0 , 颗粒间的摩擦系数为 μ . 之所以选择六角堆积, 主要是因为这种堆积结构可承受较大负载而不改变. 模拟中不考虑重力的作用, 而且所有边界是光滑的. 图中的 θ 角称为接触角, 是接触点处法线方向与竖直方向的夹角. 另外, 模型中主要采用单轴压缩的方式, 在顶部施加负载 F ; 为保证体系的结构只发生微小改变, 负载 F 不能太大. 图 1 中用 X 方向的指标 i 及 Y 方向的指标 j 标记各个圆盘, 以容器左下方为坐标原点, 颗粒 (i, j) 的坐标 (x_i, y_j) 为

先设定的值 f_{top} ; 并且控制 f_{top} , 使得各接触角只能有微小的改变. 接近 f_{top} 时, 逐步减小 v_{top} ; 达到 f_{top} 后, 使顶部边界停止运动, 让体系 ‘冷却’ 一段时间 (由于 v_{top} 减小得足够小, 边界停止后平均负载几乎不再改变), 这样就得到了一个成分无序的静态堆积样本. 最后取出样本中各接触点的接触力, 对法向力的分布进行研究. 为了表述方便, 这里把比平均力小得较多的力称为弱力, 把比平均力大

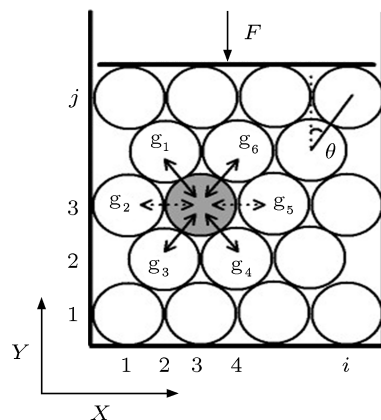


图 1 圆盘的六角堆积 (2×3 的体系, 阴影处颗粒为 g_0)

得较多的力称为强力. 研究过程中不对特别小 (小于 0.01 N) 的力进行统计, 因为这样的力在实验中很难测出, 可以认为作用力非常小的颗粒之间没有接触. 另外, 也不对颗粒与边界之间的作用力进行统计.

表 1 DEM 中主要的计算参数

总的颗粒数 $N_0/\text{个}$	2471
颗粒的半径 r_0/mm	5
颗粒的密度 $\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^3$	2600
正常颗粒的法向刚度 $k_n/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	1×10^7
正常颗粒的切向刚度 $k_\tau/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	5×10^6
颗粒间的摩擦系数 μ	0—1
顶部颗粒的平均负载 f_{top}/N	0—500
缺陷强度因子 λ	0.1 或 10
缺陷率 ε	0—0.5

3 主法向力与次法向力

图 2 给出了无摩擦情况下 5×10 系统中无缺陷和有缺陷时法向力的力网. 可以看到, 无缺陷时得到了均匀力网, 而有缺陷时得到的力网与随机堆积^[11]的情况类似, 是非均匀的力网. 改变体系规模、摩擦系数、缺陷率、缺陷刚度系数、顶部平均负载以及加载速率等参数, 仍然得了与图 2 类似的结果. 通过观察大量模拟结果中的力网图可以发现: 1) 无缺陷时的力网几乎是均匀的, 负载非常大而摩擦系数很小时会出现较为明显的带状应力不均匀区域; 2) 任何缺陷的引入都会导致力网的不均匀性, 不均匀程度与缺陷率及缺陷刚度系数密切相关; 3) 对于‘较软’的缺陷 ($\lambda < 1$), 强力主要分布在缺陷周围, 而对于‘较硬’的缺陷 ($\lambda > 1$), 强力主要分布在缺陷上. 对于法向力的分布, 较硬和较软的缺陷会产生类似的结果, 所以本文中主要选择较软 ($\lambda = 0.1$) 的缺陷进行讨论.

图 2(a) 中的均匀力网, 可以通过图 1 中 g_0 颗粒的受力分析进行解释. 将颗粒 g_i 与 g_0 之间法向力的大小记为 f_{i0} . 为了讨论方便, 把图 1 中颗粒间的法向力分为主法向力与次法向力. 主法向力指接触角在 30° 左右的力 (比如 $f_{10}, f_{30}, f_{40}, f_{60}$), 次法向力指接触角在 90° 左右的力 (比如 f_{20}, f_{50}). 明显,

竖直向下的负载使同一水平层上相邻颗粒 (如 g_1 与 g_6) 之间有分开的趋势, 因而一般情况下次法向力 f_{20}, f_{50} 会比主法向力小很多, 可以忽略. 由于静态时体系中每个颗粒必须满足力平衡和力矩平衡^[16], 因而可以得到 $f_{10} \approx f_{40}, f_{30} \approx f_{60}$, 之所以为约等于, 是由于颗粒间的摩擦及接触角可以有微小差异, 这样的结果使得主法向力按照原作用方向传递, 遇到边界后发生反射. 因而, 如果顶部每个颗粒的负载是均匀的, 那么这种均匀性就会向下传递, 从而得到均匀力网. 需要注意的是, 如果加载的方式不同 (比如双轴压缩), 那么一般情况下 f_{20}, f_{50} 不能忽略. 对于有缺陷时的图 2(b), 也可以通过对 g_0 颗粒的受力分析进行理解. 先假定图 1 中的体系没有缺陷, 加载后处于图 2(a) 的均匀力网. 然

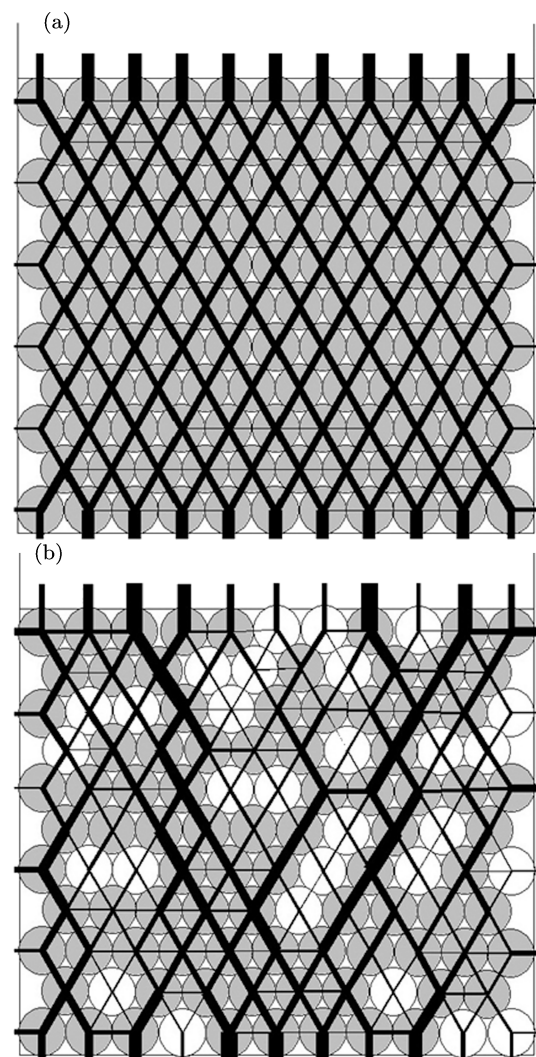


图 2 成分无序体系中的力网 (a) 无缺陷时的力网; (b) 有缺陷时的力网. 灰色为正常颗粒, 白色为缺陷 ($f_{\text{top}} = 500 \text{ N}$, $\varepsilon = 0.25$, $\lambda = 0.1$)

后考虑 g_0 是体系中惟一的缺陷, 逐渐减小其刚度系数. 明显, f_{10} 与 f_{60} 减小, 这使 g_1 与 g_6 相互靠拢, 因而直接导致了三个结果: 1) g_1, g_6 间的次法向力 f_{16} 增强了; 2) 为了保持力平衡, 主法向力 f_{12}, f_{65} 也增强了; 3) g_0 上的四个主法向力减弱了. 当然, 这些变化会进一步影响到其他颗粒, 但进行理论分析很复杂, 尤其是有多个缺陷的时候. 总之, 缺陷的引入通常会加大弱力与强力的数目, 从而增加力网的不均匀性. 通过上面的分析还可以看到, 体系中主法向力的数目一般不会变, 但由于不统计非常小的力, 因而次法向力的数目一般会改变. 另外, 缺陷的引入对主法向力与次法向力的影响也不同, 所以这里采取了与前人不同的方式, 将法向力分为主法向力与次法向力分别进行统计.

本文只对颗粒之间的法向力进行统计, 将法向力、主法向力、次法向力分别记为 f_n, f_{np}, f_{ns} . 即便是对于规则堆积的颗粒体系, 接触点处形变的微小差异、摩擦力的不确定性、加载方式及过程等因素都会导致接触力的不确定性, 可以引入法向力分布 $p'_n(f), p'_{np}(f), p'_{ns}(f)$ 分别描述 f_n, f_{np}, f_{ns} 的概率分布. 如果这三种力的数目分别为 N_n, N_{np}, N_{ns} , 平均力分别为 $\bar{f}_n, \bar{f}_{np}, \bar{f}_{ns}$, 那么应该有 $N_n = N_{np} + N_{ns}$, $N_n \bar{f}_n = N_{np} \bar{f}_{np} + N_{ns} \bar{f}_{ns}$. 而且可以得到

$$p'_n(f) = \frac{N_{np}}{N_n} p'_{np}(f) + \frac{N_{ns}}{N_n} p'_{ns}(f). \quad (2)$$

对于图 1 中 $M \times N$ 的体系, 如果所有接触点的力都不是特别小, 则可得到 $N_{ns} = 2MN + N - M$, $N_{np} = 4MN$. 因此当 $M, N \gg 1$ 时, 一般会有 $N_{np} \geq 2N_{ns}$. 为了研究方便, 需要引入规格化的法向力分布 $p_n(w), p_{np}(w), p_{ns}(w)$, 它们分别是规格化法向力 $w_n = f_n/\bar{f}_n, w_{np} = f_{np}/\bar{f}_{np}, w_{ns} = f_{ns}/\bar{f}_{ns}$ 的几率密度函数. 根据概率理论有 $p(w) = \bar{f} \cdot p'(\bar{f}w)$, 由它及 (2) 式可以导出

$$p_n(w) = \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_{np}} \frac{N_{np}}{N_n} p_{np} \left(\frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_{np}} w \right) + \frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_{ns}} \frac{N_{ns}}{N_n} p_{ns} \left(\frac{\bar{f}_n}{\bar{f}_{ns}} w \right), \quad (3)$$

这里定义 $k_n = \frac{N_{ns}}{N_{np}}, k_f = \frac{\bar{f}_{ns}}{\bar{f}_{np}}$, 由它们的定义及 (3)

式可有

$$p_n(w) = \frac{1 + k_f k_n}{(1 + k_n)^2} \left[p_{np} \left(\frac{1 + k_f k_n}{1 + k_n} w \right) + \frac{k_n}{k_f} p_{ns} \left(\frac{1 + k_f k_n}{k_f (1 + k_n)} w \right) \right]. \quad (4)$$

通过上面的讨论可以看到, 只要给出 $k_n, k_f, p_{np}(w), p_{ns}(w)$ 以及 $\bar{f}_n, \bar{f}_{np}, \bar{f}_{ns}$ 中的任意一个平均力, 就可以确定其他所有的力分布, 因而后面的模拟中主要对主法向力及次法向力的分布进行讨论.

4 力分布的模拟结果

4.1 主法向力与次法向力的分布

对于 $M \times N$ 的体系, 通过大量的数值模拟可以发现, 力分布的结果与 M 和 N 的数值有关; 但当 $M, N > 20$ 时, 力分布几乎不随体系规模而变. 文献 [5] 中采用 2500 个颗粒进行光弹性实验, 为了便于进行对比, 我们选择 30×40 的体系 (共 2471 个颗粒) 进行讨论, 模拟时采用表 1 中的参数. 通过改变缺陷率, 研究 $p_{np}(w), p_{ns}(w)$ 的变化规律. 对于主法向力的分布, 在没有缺陷时可以得到图 3 中的分布图及相应的正态概率图. 由图 3(a) 可看出, 主法向力分布 $p_{np}(w)$ 在平均力 ($w = 1$) 处有一个峰值, 然后随 w 的变化急剧下降, 大部分主法向力集中于平均力附近的一个小区间 0.97—1.03 上, 这种分布类似于正态分布. 为了检验图 3(a) 的正态性, 在图 3(b) 中做出了与之相应的正态概率图. 如果 $p_{np}(w)$ 很接近正态分布, 则图 3(b) 中的数据点应该比较紧密地围绕在图中黑色虚线周围, 可以看到 $p_{np}(w)$ 在偏离平均力较远时与正态分布有较大偏差. 改变体系规模、平均负载、摩擦系数等参数可以发现, $p_{np}(w)$ 的分布不一定与图 3 所示的相同, 有时会出现双峰, 有时比较杂乱, 但大部分主法向力仍然集中在平均力附近的一个小区间上, 因而无缺陷时的力网几乎是均匀的. 有缺陷时, 得到图 4 所示主法向力的分布图, 图中给出了主法向力的分布随着缺陷率的增加而变化的过程. 为了便于观察, 将整个过程分为图 4(a) 和图 4(b) 这两部分. 由图 4 可知, 刚引入缺陷的时候 $p_{np}(w)$ 在约 1/4 倍平均力以及平均力处产生了两个峰, 将它们分别称为主峰和次峰, 此时主峰远低于次峰, 0.5 倍平均力附

近是谷底;随着缺陷率的增加,次峰高度快速减小,而主峰高度缓慢增加并且缓慢地向强力方向移动; $\varepsilon = 0.15$ 时主峰与次峰高度近似相等, $\varepsilon = 0.3$ 时次峰消失,整个 $p_{np}(w)$ 变为单峰的分布;缺陷率由 0.3 变到 0.5 的过程中, $p_{np}(w)$ 的峰值稍有增大且向强力方向有一定移动,最后峰值停在约 0.7 倍平均力处. 在结构无序体系中,通常会得到类似于图 4(b) 的力分布^[12-14], 目前还未观察到形如图 4(a) 的力分布. 这样的结果说明无序程度较高的成分无序与结构无序有类似的力学行为,而缺陷率较小的成分无序体系与结构无序体系有较大的差异.

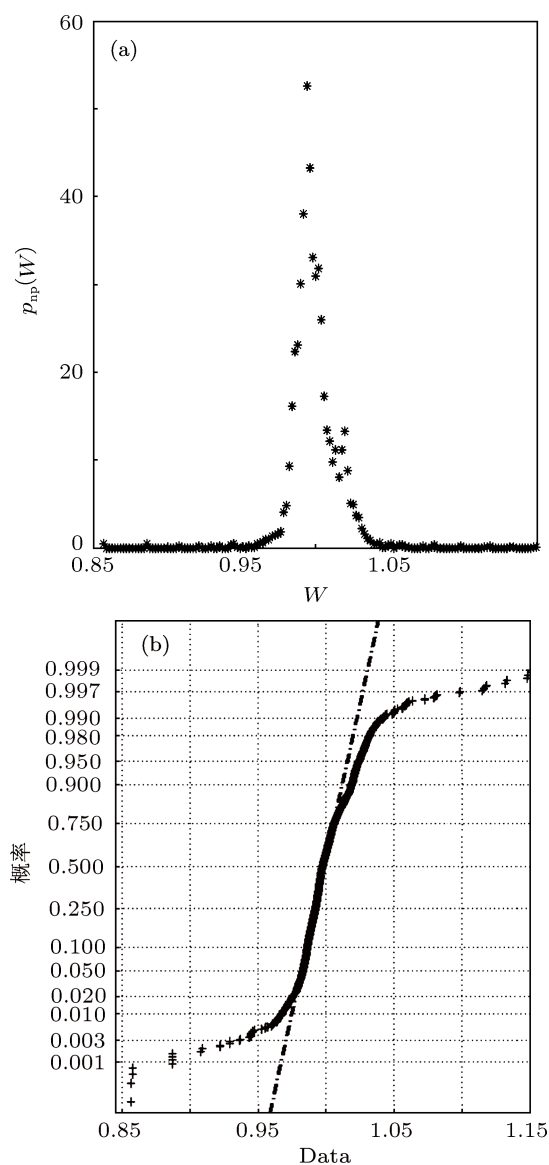


图 3 无缺陷时主法向力的分布 ($f_{top} = 250$ N, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0$) (a) 概率分布图; (b) 正态概率图

次法向力与主法向力的分布很不相同. 图 5

中给出了三种缺陷率下次法向力的分布图, 在其他缺陷率时也得到类似的分布. 可以看到, 次法向力分布 $p_{ns}(w)$ 随着 w 的增大而单调减小, 无缺陷时下降得比较快, 有缺陷时下降得较慢些, 而且各个不同缺陷率下的分布差异不太大. 通过对图 5 中的纵轴取对数坐标可以得到近似于直线分布, 也就是说 $p_{ns}(w)$ 随 w 是按指数衰减的, 可以用 $p_{ns}(w) = A_{ns}e^{-\alpha w}$ 进行拟合.

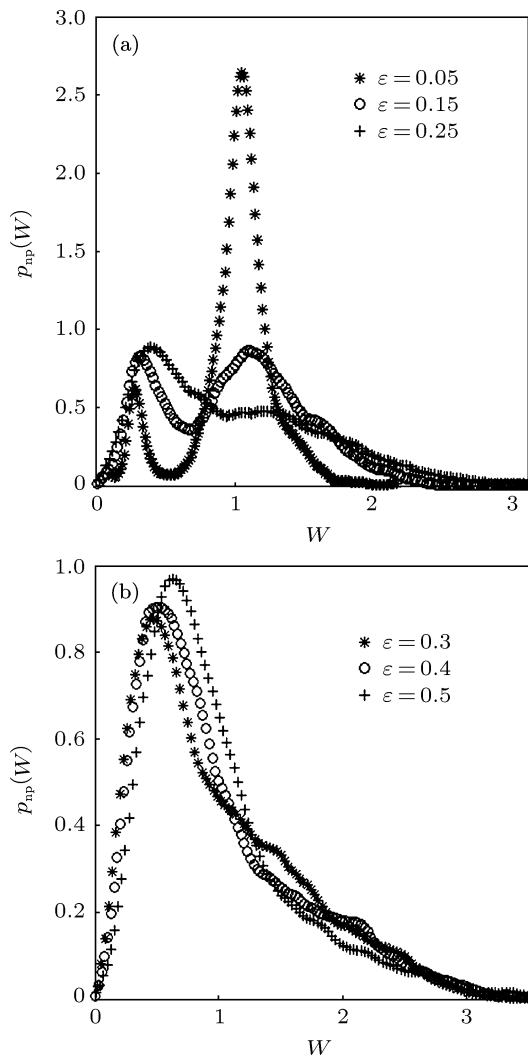


图 4 主法向力的分布与缺陷率的关系 ($f_{top} = 250$ N, $\mu = 0.5$, $\lambda = 0.1$) (a) 缺陷率为 0.05, 0.15, 0.25; (b) 缺陷率为 0.3, 0.4, 0.5

在一定条件下, 通过 q 模型^[3,6] 以及力网系综理论^[8-10] 可以得到形如图 4(b) 和图 5 所示的力分布. 力网系综理论中, 当各个力之间关联不是很强, 体系中所受约束简单时, 可以得到图 5 中指数型的分布, 它类似于统计物理中的 Boltzmann 分布; 而当各个力之间有很强的关联, 使得体系

中约束复杂时, 就会得到图 4(b) 中的分布. 图 4(b) 中的分布一般是多项式与指数函数的乘积, 可以用 $p_{np}(w) = A_{np}Q(w)e^{-\beta w}$ 进行拟合, 其中 $Q(w)$ 是多项式. 另外, 文献 [13] 中也得到了形如图 4(b) 中的分布, 但它是对重力作用下结构无序的体系进行模拟时得到的. 综上所述, 主、次法向力的分布之所以不同是因为这两种力在力网中有不同的地位. 由图 2(b) 的力网可看到, 强力链主要分布在主法向力上, 为了使得体系平衡, 邻近的主法向力间存在较强的关联. 而次法向力通常是由于同一颗粒的四个主法力之间有微小的不平衡而引起的, 因此次法向力中弱力比较多, 而且次法向力之间的关联也不强. 另外, 主、次法向力的不同也说明了文中所讨论的成分无序体系在力学性质上是各向异性的, 原因是该成分无序体系在几何结构上是规则的晶格排列. 需要注意的是, 虽然次法向力的数量比较少而且几乎都是弱力, 但它在维持体系力链结构的稳定性上有重要的作用. 通过模拟可看到, 如果体系不是六角堆积而是四角堆积, 则在顶部负载稍大时体系就会崩塌, 原因是四角堆积中没有次法向力.

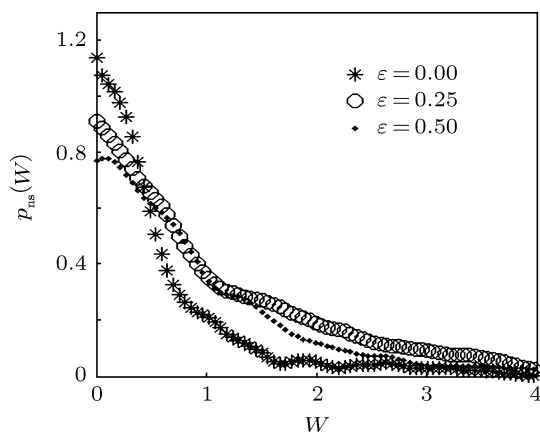


图 5 次法向力的分布与缺陷率的关系 ($f_{top} = 250$ N, $\mu = 0.5$, $\lambda = 0.1$)

4.2 法向力分布

通常的实验和计算机模拟中直接对法向力、切向力进行统计, 因此需要由 $p_{np}(w)$, $p_{ns}(w)$ 确定法向力分布 $p_n(w)$. 由 (4) 式, 只要再给出 k_n , k_f , 就可以计算出法向力分布 $p_n(w)$. 由 k_n , k_f 定义可知, 需要清楚 N_{np} 与 N_{ns} , $\bar{f}_{np}$ 与 $\bar{f}_{ns}$ 的关系. 通过大量

的模拟发现, 这些参量的值与体系规模、顶部负载、摩擦系数、缺陷率等参数都有关系, 因而这里选择一个具体的体系进行讨论. 考虑顶部平均负载为 250 N, 摩擦系数为 0 或 0.5, 规模为 30×40 的体系. 通过改变摩擦系数和缺陷率得到以下结论: 1) 主法向力的数目 $N_{np} \approx 4800$, 它几乎不会变化; 2) 主法向平均力 $\bar{f}_{np}$ 在无摩擦时约为 148 N, 有摩擦时约为 125 N, 随着缺陷率的改变小幅度地无规则振荡; 3) 次法向力的数目 N_{ns} 在无摩擦时约有 2000 个, 随着缺陷率的增加快速减小, 到达约 1700 个时几乎不再改变; 有摩擦时 N_{ns} 约有 400 个, 随着缺陷率的增加急剧增加, 到达 1600 个时几乎不再改变; 4) 次法向力的平均值 $\bar{f}_{ns}$ 在无缺陷时非常小 (约为 2 N), 随缺陷率的增加而增加, 在 $\varepsilon \approx 0.3$ 以后变化不大; 无摩擦时 $\bar{f}_{ns}$ 的平稳值约为 50 N, 有摩擦时平稳值约为 34 N.

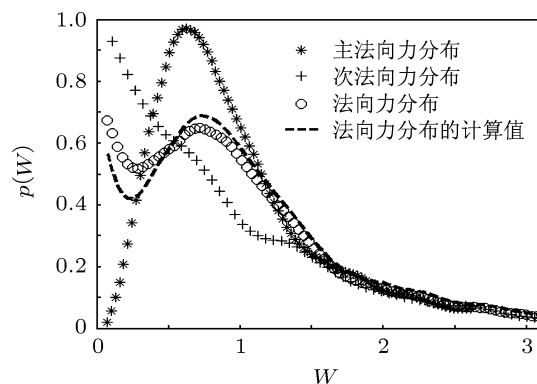


图 6 三种法向力分布 ($f_{top} = 250$ N, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\lambda = 0.1$)

为了与实验及其他模拟结果相比较, 这里讨论有摩擦时缺陷率较大的体系 (取 $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$). 由上面的讨论, 可以得出 $k_n \approx 1/3$, $k_f \approx 1/4$, 利用 (4) 式以及 $p_{np}(w)$, $p_{ns}(w)$, 就可以计算出法向力的分布 $p_n(w)$. 图 6 中给出了 $p_n(w)$, $p_{np}(w)$, $p_{ns}(w)$ 的模拟结果以及 $p_n(w)$ 的计算结果. 可以看到, $p_n(w)$ 的模拟结果与计算结果符合得较好. 由 (4) 式及 k_n , k_f 的取值可知, 在 w 较大时, 法向力分布主要决定于主法向力的分布; 而 w 较小时, 法向力分布主要决定于次法向力的分布. 对于缺陷率 $\varepsilon > 0.3$ 时法向力的分布, 也得到了上述类似的结论. 另外, 图 6 中的法向力分布与光弹性实验 [5] 及其他 DEM 模拟 [12] 的结果很类似, 所不同的是实验中并没有观察到 $w \approx 0.3$ 时的极小值, 这可能是由于前人所

处理的体系是结构无序体系, 而本文处理的是成分无序体系.

5 总结

运用 DEM 模拟研究成分无序体系中法向力的几率分布. 文中对无缺陷和有缺陷时的力网进行了讨论并且做出了定性地解释. 提出了主法向力及次法向力的概念, 从理论上导出了法向力分布与这两种力分布的关系, 并且用 DEM 模拟给出了主法向力和次法向力分布随缺陷率 ϵ 变化的规律. 最后, 讨论缺陷率较大时成分无序体系中法向力分布的形式. 模拟结果表明, 缺陷的引入使得体系中的力

网由均匀变为不均匀, 这种不均匀性与静态体系中缺陷和正常颗粒的受力状态不同密切相关. 主法向力与次法向力的分布遵循不同的规律, 随着缺陷率的增加, 主法向力经历了比较复杂的变化过程, 而次法向力总是指数型分布. 总结模拟结果可以看到, 缺陷率较小时, 成分无序体系与结构无序体系中的法向力分布很不相同; 而缺陷率较大时, 两种体系有着类似的分布规律. 本文的结论有助于进一步探索力分布的机理, 也有助于理解力网的不均匀性与体系无序性的关系. 另外, 文中主要对法向力分布与缺陷率的关系进行了讨论, 至于法向力分布与缺陷刚度系数的关系以及切向力分布的规律, 有待进一步研究.

-
- [1] Kittel C 2005 *Introduction to Solid State Physics* (New York: John Wiley & Sons Inc.)
 - [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2004 物理 **33** 629]
 - [3] Liu C, Nagel S R, Schecter D A, Coppersmith S N, Majumdar S, Narayan O, Witten T A 1995 *Science* **269** 513
 - [4] Mueth D M, Jaeger H M, Nagel S R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3164
 - [5] Majumdar T S, Behringer R P 2005 *Nature* **435** 1079
 - [6] Coppersmith S N, Liu C, Majumdar S, Narayan O, Witten T 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4673
 - [7] Socolar J E S 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3204
 - [8] Snoeijer J H, Vlugt T J H, Ellenbroek W G, Hecke M, Leeuwen J M J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054302
 - [9] Eerd A R T, Ellenbroek W G, Hecke M, Snoeijer J H, Vlugt T J H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 060302
 - [10] Zhang X G, Long Z W, Hu L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 92 (in Chinese) [张兴刚, 隆正文, 胡林 2009 物理学报 **58** 92]
 - [11] Radjai F, Jean M, Moreau J J, Roux S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 274
 - [12] Yi C H, Mu Q S, Miao T D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3636 (in Chinese) [宜晨虹, 慕青松, 苗天德 2008 物理学报 **57** 3636]
 - [13] Sun Q C, Wang G Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4667 (in Chinese) [孙其诚, 王光谦 2008 物理学报 **57** 4667]
 - [14] Yi C H, Mu Q S, Miao T D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7750 (in Chinese) [宜晨虹, 慕青松, 苗天德 2009 物理学报 **58** 7750]
 - [15] Cundall P A, Strack O D L 1979 *Geotechnique* **29** 47
 - [16] Zhang X G, Hu L, Long Z W 2006 *Chin. J. Comput. Phys.* **23** 642 (in Chinese) [张兴刚, 胡林, 隆正文 2006 计算物理 **23** 642]

Normal force distribution in two-dimensional granular system of compositional disorder*

Zhang Xing-Gang Hu Lin[†]

(College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

(Received 12 August 2011; revised manuscript received 28 September 2011)

Abstract

Point defects are implanted in an ordered granular system by randomly selecting granules and changing their stiffness coefficients. The discrete element method is used to research the normal force probability distribution. Simulation result shows that force network is almost homogeneous without defects whereas force network will become inhomogeneous with defects. The concepts of primary normal force and secondary normal force are proposed and their statistics are analyzed separately. As the rate of defects increases, the changing process of primary normal force distribution is complex, whereas the secondary normal force distribution is always exponential distribution. Our simulation shows that normal force distributions are different between randomly packing system and compositional disordered system of low defect rate. But when defect rate is large, the distributions are similar. These results are beneficial to the understanding of the relationship between inhomogeneous force network and disordered system.

Keywords: static granular system, discrete element method simulations, disordered systems, force distribution

PACS: 45.70.-n, 45.70.Cc, 02.70.-c

* Project supported by the Science Foundation for Young Scientists of Guizhou University, China (Grant No. 2009011), the Natural Science Foundation of Guizhou Province, China (Grant No. 2011-2103), and the Province Governor Foundation of Guizhou Province, China (Grant No. 2010-5)

[†] E-mail: hulin53@sina.com