非等温非牛顿黏性流体流动问题的修正光滑粒子动力学方法模拟*

蒋涛† 任金莲 徐磊 陆林广

(扬州大学数学科学学院, 扬州大学水利与能源动力工程学院, 扬州 225002)

(2014 年 5 月 7 日收到; 2014 年 6 月 11 日收到修改稿)

为准确、有效地模拟非等温非牛顿黏性流体的流动问题, 本文基于一种不含核导数计算的核梯度修正格式和不可压缩条件给出了一种改进光滑粒子动力学 (SPH) 离散格式, 它较传统 SPH 离散格式具有较高精度和较好稳定性. 同时, 为准确地描述温度场的演化过程, 建立了非牛顿黏性的 SPH 温度离散模型. 通过对等温 Poiseuille 流、喷射流和非等温 Couette 流、4:1 收缩流进行模拟, 并与其他数值结果作对比, 分别验证了改进 SPH 方法模拟非牛顿黏性流动问题的可靠性和提出的 SPH 温度离散模型求解非等温流动问题的有效性和准确性. 随后, 运用改进 SPH 方法结合 SPH 温度离散模型对环形腔和 C 形腔内非等温非牛顿黏性流体的充模过程进行了试探性模拟研究, 分析了数值模拟的收敛性, 讨论了不同位置处热流参数对温度和流动的影响.

关键词: 非等温, 黏性流体, 光滑粒子动力学, 热黏度模型

PACS: 02.70.–c, 44.10.+i, 47.11.–j, 47.85.md **DOI:** 10.7498/aps.63.210203

1 引 言

非等温非牛顿黏性流体 (主要指黏性聚合物熔体) 流动过程 [1,2] 普遍存在于工业上聚合物材料的加工过程和日常生活中, 此过程包括复杂的热量传递与转化, 对熔体黏度及流动有重要影响 [3,4]. 因此, 非等温非牛顿黏性流体流动的研究对化工工程、注塑成型及环境工程等产业具有重要意义.

非等温黏性聚合物流动的研究涉及瞬态温度控制方程的求解、流体控制方程的求解和自由界面的捕捉. 目前, 已有很多学者采用网格类方法对非等温聚合物流动进行研究 [2−5]. 然而, 网格类方法在模拟聚合物自由面流动问题时存在一些不足, 如有限差分法、有限体积法等网格类方法在实现过程中需要网格重构, 且需要借助界面追踪技术 (如 level-set 方法、流体体积方法等 [6,7]) 来捕捉流体前沿界面. 此外, 网格类方法难以模拟复杂的大变形现象, 如喷射弯曲、飞溅等现象 [8], 使其不易被推广应用到聚合物流动过程中大变形问题的模拟.

近年来, 无网格方法 [9−12] 以其独特优势在非等温传热问题的研究中得到了广泛应用, 但大多研究都集中在稳态传热问题, 对瞬态传热问题的研究还处于探索阶段, 特别是非等温聚合物流体流动问题. 于是, 本文采用光滑粒子动力学 (SPH) 方法 [12−15] 研究非等温热幂率模型和热 Cross 模型 [16] 为主的聚合物流体流动问题. SPH 方法是一种纯无网格粒子方法, 它完全摈弃了网格, 避免了网格类方法中存在的网格扭曲、网格重新划分等问题. 然而, 目前 SPH 方法用于非等温流动的情况比较少, 仅有 Jiang 等 [17] 研究了非等温 Couette 流问题、Cleary 等 [18] 研究了熔融铝液的模具铸造问题, 本文作者 [19] 运用 SPH 方法研究了瞬态热传导问题. 然而上述非等温离散模型不适合模拟非牛顿黏性流体的非等温流动过程. 此外, 传统 SPH 方法数值精度低、稳定性差, 尤其是在粒子分布不均匀或

* 中国博士后科学基金 (批准号: 2014M550310)、国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 51309200)、江苏省自然科学青年基金 (批准号: BK20130436) 和扬州大学创新培育基金 (批准号: 2013CXJ003) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jtrjl_2007@126.com

者边界附近[12,13]. 针对传统SPH方法的缺点, 很多学者提出了多种改进SPH方法[19−25]. 然而, 这些方法提高了传统SPH方法的数值精度和稳定性的同时也引入了其他问题, 如局部矩阵容易奇异、实施过程繁琐等. 因此, 已有的改进SPH方法还未被广泛应用于非等温聚合物流动问题的模拟.

本文在非等温非牛顿黏性流体流动问题模拟研究中, 将文献[19,25]中的改进SPH方法推广到非牛顿黏性流动问题的模拟, 给出一种基于非牛顿黏性流动问题模拟的改进SPH(Corrected SPH for Non-Newtonian Viscous Fluid, CSPH_NVF)格式. 其主要优点在于: 1)提高了传统SPH格式的数值精度、改善了其稳定性; 2)不含核导数计算, 且较其他改进SPH方法具有较高计算效率. 随后, 为准确描述聚合物熔体流动中温度场的演化过程, 建立了非牛顿黏性流体的SPH温度离散模型. 本文首先对平板Poiseuille流和喷射弯曲问题进行了模拟, 验证了CSPH_NVF方法求解非牛顿黏性流动问题的可靠性. 其次通过非等温Cuette流和4:1平板收缩流问题的求解, 验证了建立的SPH温度离散模型的有效性. 研究结果表明, CSPH_NVF方法具有较高数值精度和较好数值稳定性, 得到的粒子分布更加均匀. 最后, 将CSPH_NVF方法与提出的SPH温度离散模型结合, 对环形腔和C形腔内非等温非牛顿黏性流体的充模过程进行了模拟, 分析了流动问题模拟的收敛性, 并讨论了不同位置处热流参数对温度和流动的影响.

2 非等温非牛顿黏性流体控制方程

在二维Lagrange坐标系下, 可压缩非等温黏性流体的质量、动量、温度控制方程[2,3,24−26]为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

$$\rho c_{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot(\kappa\nabla T) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}, \tag{3}$$

其中$\mathrm{D}/\mathrm{D}t$表示物质导数$\mathrm{D}/\mathrm{D}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla$, $\boldsymbol{u} = (u, v)$为速度, ρ, c_{p}和κ分别表示流体的密度、比热容和导热系数, 在本文中均为常数. T为温度, $\boldsymbol{F}$代表体积力或重力加速度$\boldsymbol{g} = (g_x, g_y)$. $\boldsymbol{\sigma} = -pI + 2\eta\boldsymbol{d}$ (其中I为单位阵, 变形速度张量$\boldsymbol{d} = (1/2)(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})$).

本文主要考察非牛顿黏性流体的非等温流动问题, 采用两种热黏度模型来描述温度与黏度的关系, 即非等温热幂律模型[3,16]

$$\begin{aligned}\eta(\dot{\gamma}, T) &= m\dot{\gamma}_0^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\varphi(T-T_{\mathrm{ref}})}, & \dot{\gamma} \leqslant \dot{\gamma}_0,\\ \eta(\dot{\gamma}, T) &= m\dot{\gamma}^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\varphi(T-T_{\mathrm{ref}})}, & \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0,\end{aligned} \tag{4}$$

和热Cross黏度模型[3,16]

$$\frac{\upsilon(\dot{\gamma}, T) - \upsilon_\infty}{\upsilon_0 - \upsilon_\infty} = \frac{1}{(1 + (K\dot{\gamma})^{\tilde{m}})}\,\mathrm{e}^{-\varphi(T-T_{\mathrm{ref}})}, \tag{5}$$

其中$\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathrm{tr}(\boldsymbol{d}^2)}$, $\dot{\gamma}_0$是一个比较小的$\dot{\gamma}$值, 用于防止$\dot{\gamma} \to 0$时(4)式发生奇异, 本文取$\dot{\gamma}_0 = 10/s$. 参数m和n分别是一致性系数和幂率指数. 当$0 < n < 1$时, 熔体具有剪切变稀特性; 当$n > 1$时, 熔体具有剪切变稠特性. 若$n = 1$, (4)式变为牛顿黏度模型. φ为温度依赖参数, T_{ref}为参考温度.

3 改进SPH离散格式及SPH温度离散模型

3.1 改进SPH离散格式

传统SPH方法主要基于积分插值思想, 它将流体用有限个粒子表示, 每个粒子带有一定的密度(ρ)、质量(m)、温度(T)等物理性质.

在SPH方法中, 任意函数$f(\boldsymbol{r})$在位置$\boldsymbol{r} = (x, y)$处一阶导数的粒子近似式[12]为

$$\langle\nabla\cdot f(\boldsymbol{r})\rangle = -\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}f(\boldsymbol{r}_j)\nabla_j W_{ij}, \tag{6}$$

其中, 核函数$W_{ij} = W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j, h)$, 核导数$\nabla_j W_{ij} = \dfrac{\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i}{r_{ij}}\dfrac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}$, r_{ij}为粒子i和粒子j之间的距离, h为光滑长度. 本文取三次样条核函数[12].

于是, 质量守恒方程和动量方程的传统SPH离散形式分别为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\rho_i}{\mathrm{D}t} &= -\rho_i(\nabla\cdot\boldsymbol{u})_i\\ &= -\sum_j m_j(u_j^\beta - u_i^\beta)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}\\ &= \sum_j m_j u_{ij}^\beta\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{D}t}\right)_i = \sum_j m_j\left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2}\right)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F^\alpha. \tag{8}$$

然而上述传统SPH离散格式数值精度低, 稳定性差[13,25]. 针对传统SPH的缺点, 很多专家学者提出了多种改进SPH方法, 然而这些改进SPH方法都存在各自的缺点[19,25]. 作者在文献[25]中

基于传统SPH离散格式对核梯度进行改进, 提出了一种改进SPH方法. 然而, 文献[25]中的改进SPH方法对动量方程的离散仍采用了对称形式, 将其应用于非牛顿黏性熔体流动问题的模拟时, 易导致数值精度低, 甚至界面失真[27]等问题.

基于上述问题, 本文考虑不可压缩条件$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$, 结合文献[27]分析的SPH方法中各个离散格式的优缺点, 对压力项采用对称离散形式, 同时借助文献[15,18,27,28]的思想, 将动量方程中的Laplace算子表示成一阶导数及其有限差分近似的混合形式. 于是动量方程离散(8)式变为

$$\left(\frac{\mathrm{D}u^{\alpha}}{\mathrm{D}t}\right)_i=\sum_{j=1}^{N}m_j\left(\frac{P_i}{\rho_i^2}+\frac{P_j}{\rho_j^2}-\frac{4m_j(\eta_i+\eta_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}\times\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2+0.01h^2}+\varPi_{ij}\right)\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}+g^{\alpha},\tag{9}$$

其中$\varPi_{ij}$为人工黏性, 本文采用文献[12,13]中的表达式形式.

将文献[19,25,29]中的核函数导数改进、密度耗散项、人工黏度耗散项等改进措施引入(7)式和(9)中, 得

$$\left(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\right)_i=\sum_{j=1}^{N}m_j(u_i^{\beta}-u_j^{\beta})\frac{\tilde{\partial}^C W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}}+\varsigma hc\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\varphi_{ij}\cdot\frac{\tilde{\partial}^C W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}},\tag{10}$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}u^{\alpha}}{\mathrm{D}t}\right)_i=\sum_{j=1}^{N}m_j\left(\frac{P_i}{\rho_i^2}+\frac{P_j}{\rho_j^2}-\frac{4m_j(\eta_i+\eta_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}\times\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2+0.01h^2}\right)\frac{\tilde{\partial}^C W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}+\chi^c\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\varPi_{ij}\frac{\tilde{\partial}^C W_{ij}}{\partial x_i^{\alpha}}+F^{\alpha},\tag{11}$$

上式中系数ς,χ均为正数, 分别控制着密度耗散项和人工黏度项的变化幅度. 一般地, $0<\varsigma<0.1$, $0<\chi<0.2$, 本文中取$\varsigma=0.03$, $\chi=0.1$. (10)式中

$$\varphi_{ij}=2(\rho_j-\rho_i)\frac{\boldsymbol{r}_{ji}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^2},\tag{12}$$

修正后的核梯度$\dfrac{\tilde{\partial}^C W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}}$为

$$\nabla_i^S W_{ij}=(\boldsymbol{A}^s)^{-1}\begin{pmatrix}(x_j-x_i)W_{ij}\\(y_j-y_i)W_{ij}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^s=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}x_{ji}x_{ji}W_{ij} & \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}y_{ji}x_{ji}W_{ij}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}x_{ji}y_{ji}W_{ij} & \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}y_{ji}y_{ji}W_{ij}\end{pmatrix},\tag{13}$$

值得注意的是, (11)式已不再满足Taylor展开原则, 但它们结合了传统SPH方法的一阶导数及其有限差分近似, 增加了数值求解的稳定性和精度[27,28].

由于边界处粒子缺失, 如果此时仍然在流体域边界附近采用核梯度改进格式容易出现局部矩阵奇异的情况, 使得数值精度较低. 因此本文后续的模拟应用中在流体域边界附近不采用核梯度改进格式(13)式, 而仅施加耗散项.

为方便起见, 将(10)—(13)式统称为CSPH_NVF (Corrected Smoothed Particle Hydrodynamics for non-Newtonian Viscous Fluid, CSPH_NVF)方法.

模拟中将不可压缩流体看作弱可压缩流体, 为得到不同时刻不同粒子的压力值, 本文采用文献[29]中的状态方程

$$p_i=c^2(\rho_i-\rho_0),\tag{14}$$

其中$c\approx 10V_0$代表声速(V_0为特征速度).

由

$$\frac{\mathrm{D}x_i^{\alpha}}{\mathrm{D}t}=u_i^{\alpha},\tag{15}$$

即得粒子位置.

为准确、稳定地求解上述方程组(10)、(11)和(15), 对时间积分格式采用二阶精度的预估校正格式(其具体形式可见文献[30]). 此外, 根据文献[12,26,28]知, 粒子方法数值模拟中, 时间步长的选取对数值精度和稳定性有重要影响. 在SPH方法的模拟中时间步长Δt的选择通常需要满足下面的限制条件[12,26,28]:

$$\Delta t\leqslant\min\left\{0.1\frac{h}{V_{\max}},\left(\frac{h}{F}\right)^{1/2},0.5\frac{\rho h^2}{\eta_0}\right\}.\tag{16}$$

3.2 SPH温度离散模型

现实生活中, 许多流动过程都涉及热量的传递与转化, 即是一个非等温过程. 然而, 目前温度控制方程的SPH离散模型还关注比较少, 仅有Cleary等[18]采用SPH方法对熔融金属液的非等温充模过程进行了研究, 然而作者通过模拟测试中发现

文献[18]给出的温度离散格式只适用于牛顿熔体. 目前也没有相关的非等温非牛顿黏性聚合物熔体的SPH温度离散模型可以借鉴. 因此, 本文借助已有的温度方程和SPH方法离散思想, 探索性地给出一种非等温非牛顿黏性流体的SPH 温度离散模型.

观察(3)式可知, 方程右端第一项含有二阶导数项 $\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$, 如果直接采用SPH方法的二阶导数离散式对 $\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$ 进行离散容易产生不稳定[13,,27,28]. 于是, 受(9)式处理方式的启发, 结合文献[27,28]的离散思想, 将项 $\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$ 表示成温度的一阶导数及其有限差分近似的混合形式, 可得到如下的温度控制方程离散形式

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)_i &= \left(\frac{1}{c_\mathrm{p}}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{4m_j}{(\rho_i+\rho_j)^2}\frac{(\kappa_i+\kappa_j)\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\nabla_i W_{ij}}{(|\boldsymbol{r}_{ij}|^2+\varphi^2)}T_{ij}\\ &+\left(\frac{1}{c_p}\right)\sum_{j=1}^{N}2\eta(\dot{\gamma},T)\frac{m_j}{\rho_i\rho_j}d_j^{\alpha\beta}:d_j^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $T_{ij}=T_i-T_j$, $\varphi=0.1h$.

类似地, 将方程(17)中的 $\nabla_i W_{ij}$ 用 $\tilde{\nabla}_i^C W_{ij}$ 代替, 则非牛顿黏性熔体的改进SPH温度离散模型为

$$\begin{aligned}\left(\frac{dT}{\mathrm{d}t}\right)_i &= \left(\frac{1}{c_\mathrm{p}}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{4m_j}{(\rho_i+\rho_j)^2}\frac{(\kappa_i+\kappa_j)\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\tilde{\nabla}_i^C W_{ij}}{(|\boldsymbol{r}_{ij}|^2+\varphi^2)}T_{ij}\\ &+\left(\frac{1}{c_p}\right)\sum_{j=1}^{N}2\eta(\dot{\gamma},T)\frac{m_j}{\rho_i\rho_j}\tilde{d}_j^{\alpha\beta}:\tilde{d}_j^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{18}$$

其中

$$\tilde{d}_j^{\alpha\beta}=(u_i^\alpha-u_j^\alpha)\frac{\tilde{\partial}^C W}{\partial x_i^\beta}.$$

(17)式保证了热通量能够自动、连续地跨过材料交界面, 如模壁和熔体界面等. 它能够精确模拟不同导热系数材料间的热传导, 适用于绝热、热对流以及辐射热损失几种情况的热传导问题.

4 数值验证

4.1 改进SPH方法的有效性

4.1.1 平板Poiseuille流

平板Poiseuille流问题是一个经典算例, 这里用此算例验证CSPH_NVF方法求解非牛顿黏性流场的有效性.

考察幂律流体的平板Poiseuille流问题, 达到稳态时速度的解析解可见文献[16]. 模拟中采用的物性参数为: 一致性系数 $m=100$ Pa·s^n, 幂律指数 $n=0.8$, 密度 $\rho=10^3$ kg/m^3, 管道宽度 $L=1$ m, 流体黏度 $\eta=10^3$ Pa·s, $\dot{\gamma}_0=10^{-4}$/s, 时间步长 $\Delta t=10^{-5}$ s, 管道入口处布置20个粒子. 值得注意的是本文基于SPH方法研究平板Poiseuille问题, 粒子始终处于运动状态, 不能施加网格类方法的入口边界条件, 因此本文对流体施加恒定力 $F=0.1$ N, 两端施加周期边界条件.

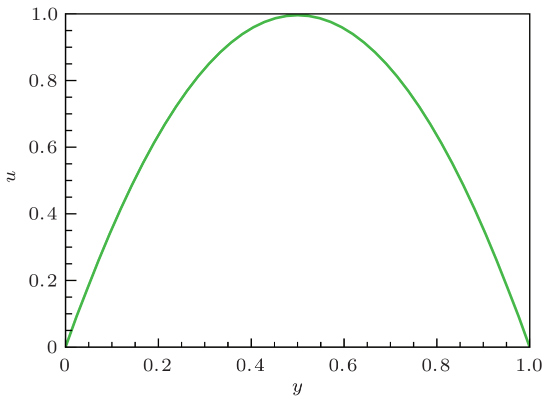


图1 幂律流体的Poiseuille流速度剖面

图1给出了达到稳态时的速度剖面, 所得结果与文献[16]中给出的解析解变化趋势一致, 这说明CSPH_NVF方法能够有效地求解非牛顿黏性流体的流场. 此外, 此算例也涉及固壁边界的处理, 上述结果也说明本文采用的固壁虚粒子法[12,13]有效.

4.1.2 非牛顿黏性液柱下落问题

为了验证本文提出的CSPH_NVF方法能够处理非牛顿黏性自由面问题, 本小节对Cross液柱落在平板的流动进行模拟. 模拟中所采用的Cross模型参数为: 零剪切黏度 $\upsilon_0=0.01$ m^2/s, 最小黏度 $\upsilon_\infty=0.001$ m^2/s, $K=m=1$, 喷口宽度为 $D=0.004$ m, 熔体下落高度为 $H=18D$, 熔体下落速度为 $U=0.5$ m/s, 此时对应着 $Re=0.2$, $Fr=2.52$, 时间步长为 $\Delta t=10^{-6}$ s.

图2给出了Cross液柱落在平板的流动结果, 并与同等条件下牛顿流体的结果进行比较. 可以看出, Cross流体在落到平板上之前就出现了明显的拉伸变细现象, 而此时牛顿流体还没有出现拉伸变

细现象, 且Cross流体到达平板的时间短于牛顿流体到达平板的时间(见图2 (a1)—(b2)). 碰到水平固壁后, 由于Cross流体的剪切变稀, Cross流体向两边伸展的速度比牛顿流体向两边伸展的速度快(见图2 (c1), (c2)), 随着流体的继续注入, Cross流体仅有轻微喷射弯曲现象, 且在中间位置出现了凹陷, 而此时牛顿流体已出现了几个折叠弯曲. 此外可以发现, CSPH_NVF方法得到的粒子分布较规则. 上述现象与文献[8]给出的结论相同, 说明本文的CSPH_NVF方法能够有效模拟非牛顿黏性流体自由面问题.

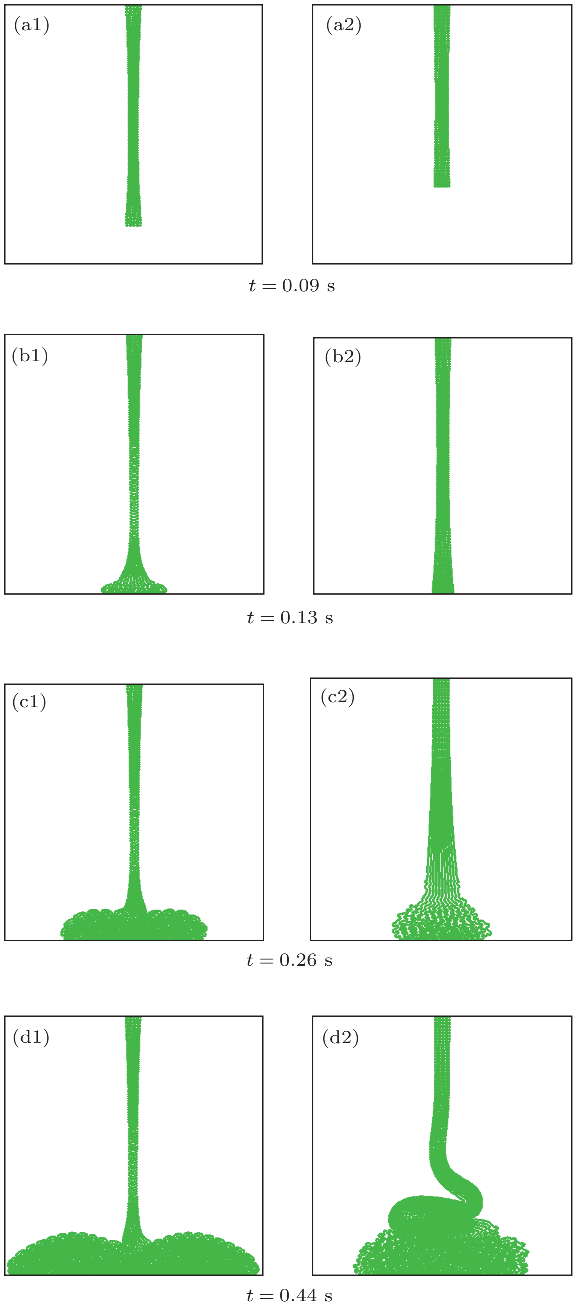


图2 (网刊彩色) 不同时刻的Cross流体(左)与牛顿流体(右)液柱落在平板上

4.2 SPH温度离散模型验证

4.2.1 非等温Couette流

本小节考察牛顿流体Couette流的热传导问题以验证提出的改进SPH温度离散模型的有效性, 其达到稳态时的温度解析解可见文献[17]. 模拟中用到的无量纲参数为$Br = \eta U^2/(\kappa(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{W}))$, 其中$U$为特征速度, η, T_f分别为熔体的黏度和温度, T_W为壁面温度. 为简单起见, 这里仅考虑$Br = 10^{-4}$的情况. 所采用的参数为: 上平板速度为$U_0 = 5.0\times10^{-3}$ m/s, 上平板温度为$T_\mathrm{W1} = 275.5$ K, 下平板温度为$T_\mathrm{W} = 273$ K, 比热容为$c_\mathrm{p} = 0.01$ J/kg·K, 导热系数$\kappa = 0.1$ W/m·K.

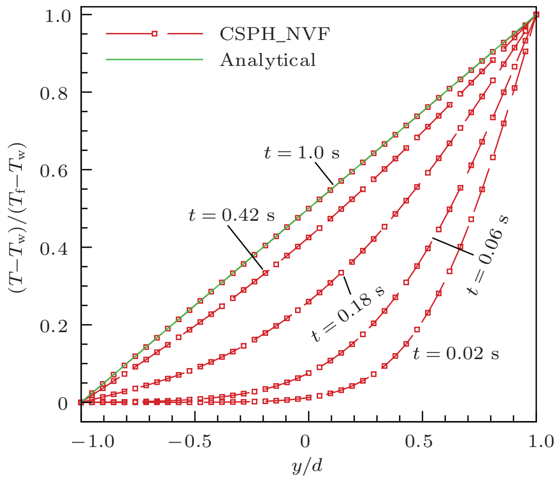
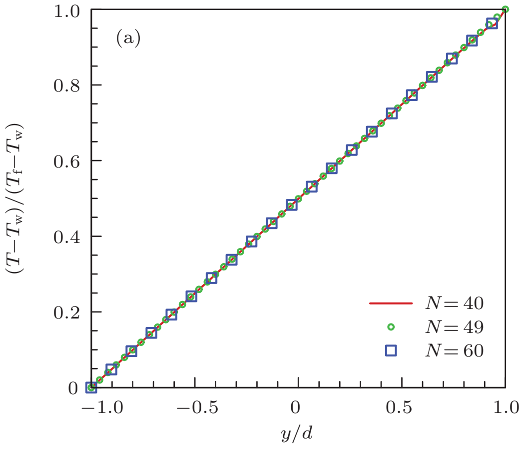


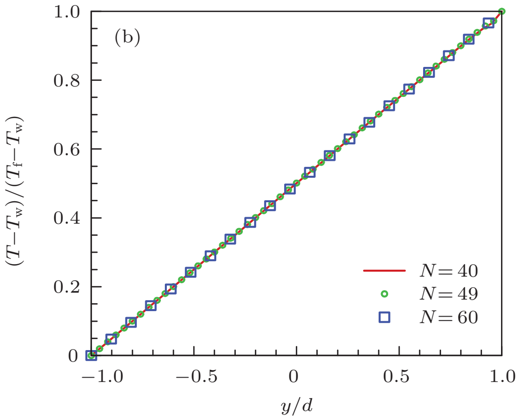
图3 (网刊彩色) Couette流的温度剖面

图3给出了非等温Couette流沿y轴方向的温度演化过程. 可以看出, 流动达到稳态时的温度呈线性分布, 由本文提出的SPH温度离散模型得到的温度与文献[17]给出的温度变化趋势一致.

为表明提出的SPH温度离散模型具有较好的收敛性, 图4给出了不同h和入口粒子数N下非等温Couette流的温度剖面. 由图4可以看出, $h \geqslant dx$时不同粒子数N下得到的结果都是收敛的, $h = 1.0dx$时不同粒子数下的结果均符合很好, 而$h = 1.2dx$时x方向粒子数取为40和49的温度剖面在边界处温度有轻微的振荡, $h = 1.4dx$时x方向粒子数取为40和60的温度剖面在边界处温度有轻微的振荡, 粒子数为40的温度振荡更严重些. 上述结果说明只要合适选择h/dx, 本文提出的SPH温度离散模型收敛.

由图3和图4的结果分析可知, 本文提出的温度离散模型在合适选择参数h/dx的情况下能够有效地、收敛地捕捉温度场的演化过程.





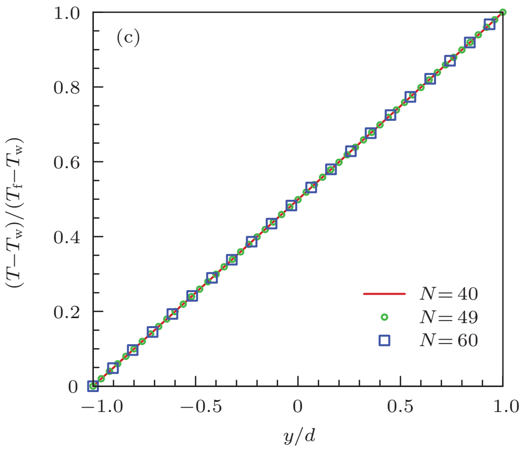


图 4 (网刊彩色) 不同 h 和 N 下 Couette 流的温度剖面
(a) $h = dx$; (b) $h = 1.2dx$; (c) $h = 1.4dx$

4.2.2 非等温4:1平板收缩流

4:1平板收缩流是工业生产中常见的一种流动, 常被用来检验算法的有效性. 该问题中, 熔体从较宽的槽道流入较窄的槽道, 壁面附近处熔体受到复杂的强剪切作用, 从而使得模拟极其困难. 图5给出了4:1收缩流的型腔形状及尺寸. 非等温流动中, 定义无量纲参数 $Pe = \rho U L c_{\mathrm{p}}/\kappa$, 它表示热对流项和扩散项所占的比重, 其中 U 为特征速度, L 为特征长度, c_{p} 为比热容, κ 为导热系数.

模拟中采用热幂律模型, 对应的物性参数取为: 密度 $\rho = 1.0$ kg·m^{-3}, 幂律指数 $n = 0.8$, 熔体初始黏度为 $\eta = 50$ Pa·s, $\dot{\gamma}_0 = 0.1$/s, $\varphi = 0.001$ °C^{-1}, 比热容 $c_{\mathrm{p}} = 0.5$ J/kg·K, 导热系数 $\kappa = 2.5$ W/m·K, $Pe = 200$. 模拟中在入口处布置33个粒子, 时间步长为 $\Delta t = 10^{-3}$ s.

值得注意的是, 基于SPH方法的Lagrange特点, 该问题模拟所采用的边界条件与网格类方法的边界处理不同. 模拟中边界条件为: 入口处: 对熔体施加水平方向的恒定力 F, 使得熔体能够获得一个恒定水平速度 u, 入口温度 $T_{\mathrm{entry}} = 373$ K; 出口处: 压力 $p = 0$; 固壁边界: 施加无滑移边界条件, 固壁温度 $T_{\mathrm{W}} = 273$ K.

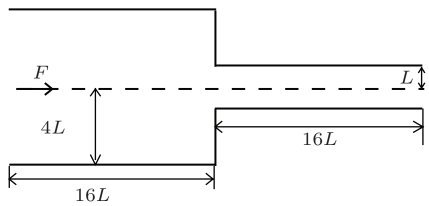


图 5 4:1平板收缩流示意图

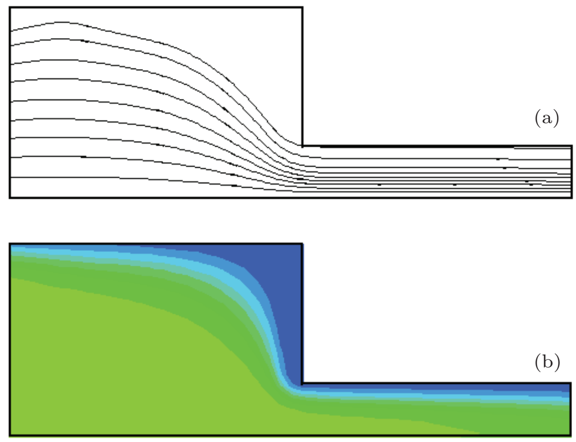


图 6 (网刊彩色) $Pe = 200$ 时热幂律流体4:1收缩流
(a) 流线; (b) 温度分布

图6给出了流动达到近稳态时的流线、温度分布. 由图6可以看出, 收缩口上角点附近未出现漩涡, 冷温区出现在壁面附近. 图6的结果与文献[16]的结果近似, 表明本文提出的算法稳定、可信. 值得注意的是, 由于粒子方法本身特点及边界条件等与基于网格方法处理的不同[16], 使得运用粒子方法对收缩流进行模拟存在很大困难, 且至今关于该问题的SPH模拟鲜有报道, 本文试探性地给出了收缩流达到近稳态时的温度分布结果, 所得结果与文献[16]的结果趋势一致.

5 非等温黏性聚合物充模问题模拟

本节为进一步验证提出修正SPH方法结合SPH温度离散模型模拟复杂流动问题的有效性和可靠性，对环形腔和C形腔两种情况下的非等温黏性聚合物充模问题进行了试探性模拟研究.

5.1 环形腔内非等温流动

本小节对环形腔内非等温非黏性流体充模过程进行了模拟. 型腔模型和尺寸见图7，入口宽度$L = 45$ mm，外圆半径$R_1 = 1.5L$，内圆半径$R_2 = 0.5L$，圆心$O(0, 2.5L)$. 定义无量纲参数$Pe = \rho U L c_{\mathrm{p}}/\kappa$. 模拟中采用热Cross模型及入口速度为$u = 5.0$ m/s. 热Cross模型参数为：密度$\rho_0 = 10^3$ kg·m^{-3}，熔体黏度$\eta_0 = 10^2$ Pa·s，$\eta_\infty = 10.0$ Pa·s，$K = m = 1.0$. 壁面温度$T_{\mathrm{w}} = 273$ K，熔体温度$T_{\mathrm{f}} = 323$ K，温度依赖参数$\varphi = 0.001$ °C^{-1}，比热容$c_{\mathrm{p}} = 111.1$J/kg·K，导热系数$\kappa = 1.0$ W/m·K，对应着$Pe = 10000$，时间步长$\Delta t = 10^{-5}$ s. 模拟中取总流体粒子数为9000，入口处放置30个粒子，流体粒子的初始粒子间距为$dx = 0.0015$ m. 此外为了考察Pe数对温度的影响，模拟了不同Pe数下的非等温非牛顿黏性流体充模过程，并考察参考点(0.0, 0.75L)处温度随Pe数的变化.

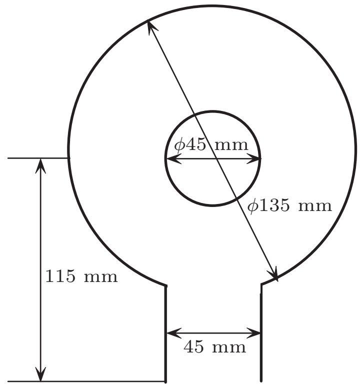


图7 型腔模型及尺寸

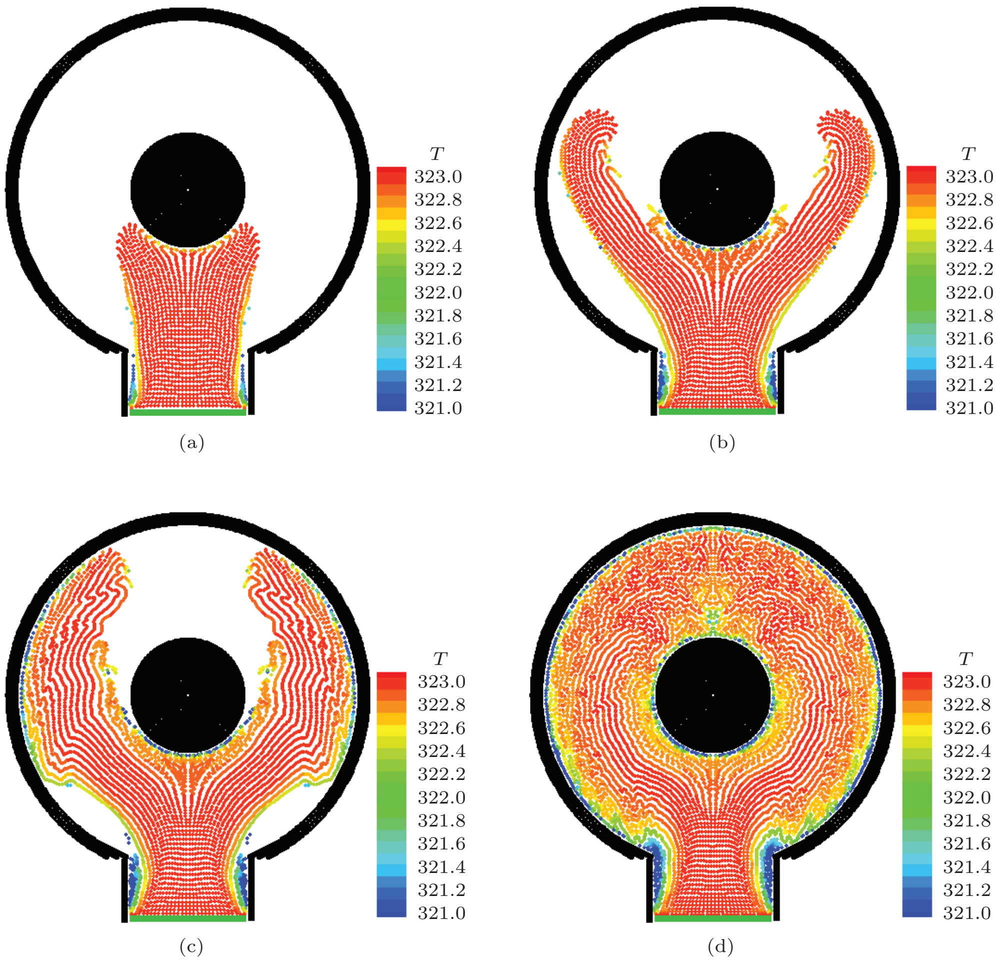


图8 (网刊彩色) 环腔内非等温Cross流体充模过程 (a) $t = 0.016$ s; (b) $t = 0.032$ s; (c) $t = 0.050$ s; (d) $t = 0.076$ s

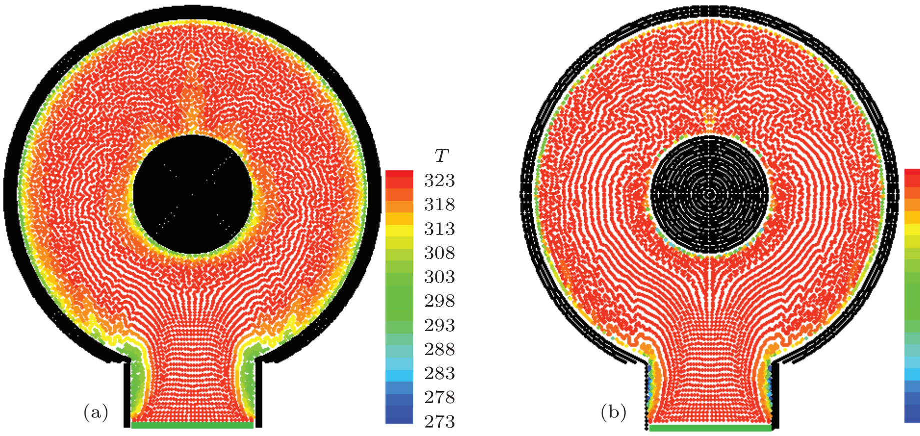


图 9 (网刊彩色) 型腔充满时不同 Pe 数下的温度分布 (a) $Pe = 1000$; (b) $Pe = 100000$

图8给出了环形腔内非等温Cross流动过程. 可以看出, 随着时间延长, 由于流体与冷固壁的热交换作用, 固壁附近的熔体温度下降较快, 内部熔体温度较高, 入口拐角处的熔体由于靠近边界而温度较低. 值得注意的是, 由于本文选取的比热容比较大, 导热速度较慢, 所以温度下降幅度较小. 上述结果均符合客观现象. 这说明本文提出CSPH_NVF方法结合提出的SPH温度离散模型能够有效地模拟非等温非牛顿黏性流体充模过程.

图9给出了型腔充满时不同 Pe 数下的温度分布情况. 由图9及图8(d)可以看出, 随着 Pe 数的逐渐增加, 低温区域逐渐减少, 这是因为随着 Pe 数的增加, 对流导致的热交换代替热耗散引起的热交换而逐渐占据主导地位. 图10给出了参考点的温度值随 Pe 数的变化情况. 可以看出, 参考点处的温度值随着 Pe 的增大而增加, 也验证了图9的结论.

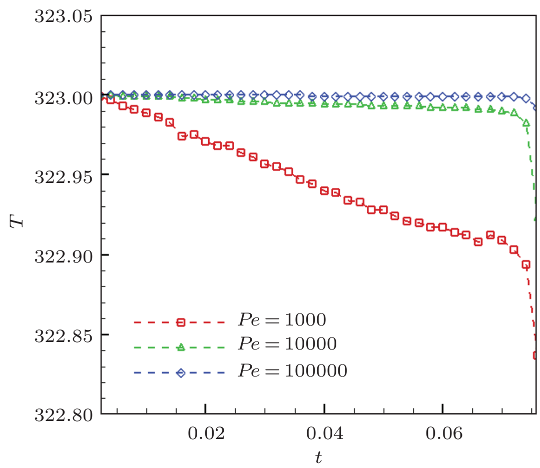


图 10 (网刊彩色) 参考点处的温度随 Pe 数的变化

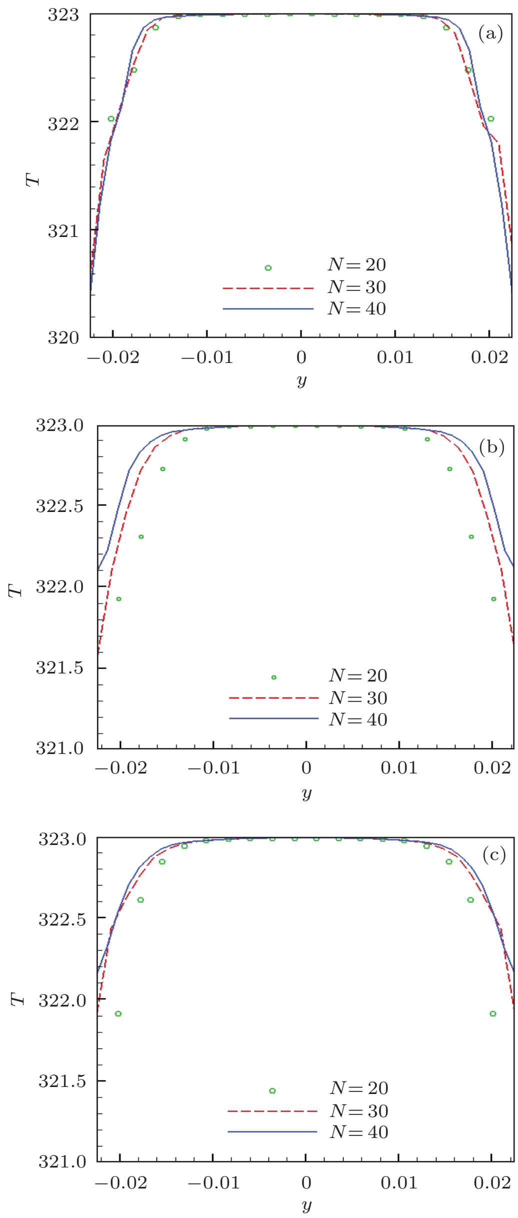


图 11 (网刊彩色) $t = 0.028$ s时刻 $y = 22.5$ mm 处不同 h 和入口粒子数 N 下的温度 (a) $h = 1.0dx$; (b) $h = 1.2dx$; (c) $h = 1.4dx$

下面考察提出的改进SPH温度离散模型应用于充模问题时的收敛性. 图11给出了$t = 0.028$ s时刻不同h和不同入口粒子数N下$y = 22.5$ mm处的温度变化情况. 由图11可以看出$h \geqslant dx$时, 不同N下得到的温度曲线变化趋势一致. $h = 1.0dx$时$y = 22.5$ mm处的温度不稳定; $h = 1.4dx$时得到的结果相对更好些. 上述结果说明在合适选择h/dx的情况下提出的改进SPH温度离散模型模拟非等温非牛顿黏性流体充模问题时具有较好的收敛性, 得到的数值结果可靠. 值得注意的是, 本算例中流体始终处于流动状态, 因此流动无法达到稳态.

5.2 C形腔内非等温流动

本小节利用本文提出的CSPH_NVF方法结合SPH温度离散模型模拟一个典型C形腔内的非等温非牛顿黏性流体的充模过程. 型腔形状和尺寸如图12所示, 其中包括入口和一个C形管道. 五个参考点为$A(1.01, 1.0)$, $B(1.25, -1.0)$, $C(1.5, 1.0)$, $D(1.0, 0.0)$, $E(1.0, -0.5)$.

模拟中采用的参数为: 密度$\rho_0 = 10^3$ kg/m^3, 入口速度$u = 1.0$ m/s, 型腔入口宽度$L = 2$ m. 本算例采用热幂律模型, 材料参数为: 熔体初始黏度$\eta_0 = 1.22 \times 10^3$ Pa·s, 幂律指数$n = 0.8$, 一致性系数$m = 1933$, 此时$Re = 0.5$. 固壁温度$T_{\rm w} = 273$ K, 流体温度$T_{\rm f} = 323$ K, 温度依赖参数$\varphi = 0.001$ °C^{-1}, 比热容$c_{\rm p} = 1.0$ J/kg·K, 导热系数$\kappa = 10.0$ W/m·K, 对应着$Pe = 100$. 入口处放置27个粒子, 初始粒子间距为0.07 m, 时间步长$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ s.

图13给出了不同时刻的粒子位置和温度分布. 由图13可以看出, 自由表面和边界附近的温度低于其他区域的温度. 且随着时间的延长, 低温区域面积逐渐增大. 这是因为: 一方面, 自由表面附近的流体是最早进入型腔的部分, 与冷固壁进行热交换的时间比较长, 使得自由表面附近的温度逐渐降低; 另一方面, 由于型腔的复杂性, 流体在竖直方向的流动增加, 造成自由表面附近流体的温度逐渐趋于冷固壁的温度. 冷固壁与熔体持续热交换也使得边界附近的熔体温度持续下降.

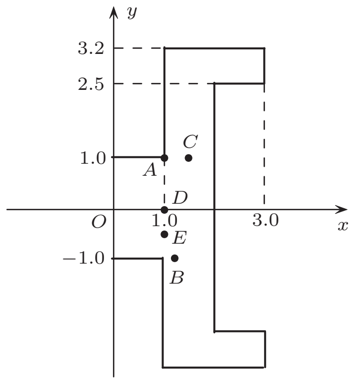


图12 C形腔形状及尺寸

图14给出了不同时刻的压力分布情况. 由图14可以看出, 熔体遇到竖直固壁时压力瞬间增大, 且随着熔体的不断充入, 竖直固壁附近的压力逐渐增大. 值得注意的是, 图14中$t = 2.0$ s时出现了一个负压区域, 这说明此处的压力小于基准压力(由压力状态方程可以计算得到基准压力为0). 这是因为当熔体到达第一个拐点附近时流道突然增大, 这使得熔体产生了胀大的趋势, 导致此区域的压力值下降. 此现象发生在充填的早期, 熔体经过第二个拐点附近时不再出现负压区域.

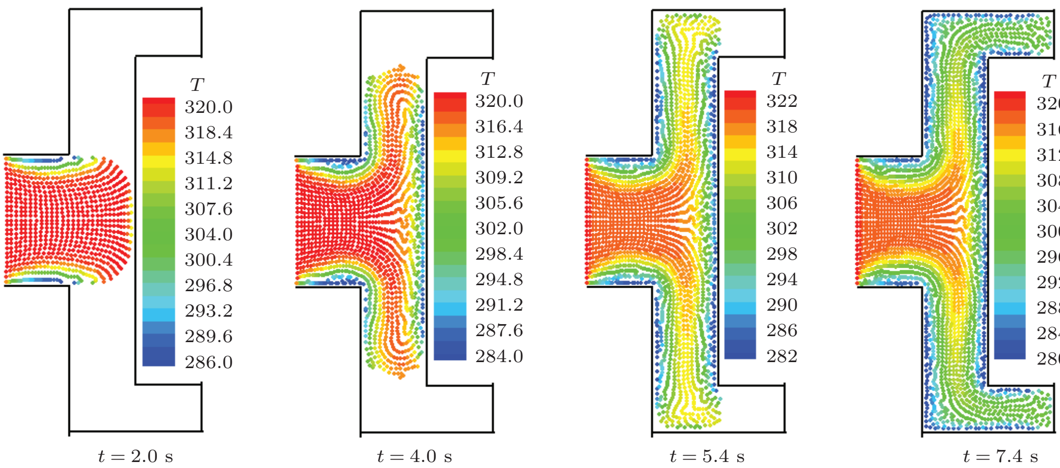


图13 (网刊彩色) 不同时刻的粒子位置和温度分布

图15给出了不同时刻一半型腔内的速度矢量. 由图15可以观察到熔体的泉涌效应. 由于固壁的拖曳作用, 熔体在型腔中部的速度比固壁边界附近的速度大, 符合客观现象.

由图13至图15的结果可以看出, 温度场和压力场稳定无振荡, 速度场符合客观现象, 其结果与文献[3,16]的结果趋势一致, 但由于采用的方法、边界条件等不同, 两者结果有所不同. 上述数值结果表明CSPH_NVF方法联合提出的温度离散格式及固壁边界处理能够有效、可靠地模拟非牛顿黏性流体的非等温充模过程.

图16给出了不同粒子数下D点物理量. 由图16可以看出, 不同粒子数下的温度、速度u变化趋势一致. 值得注意的是, 由于粒子数增加时, 计算量随着增大, 因而熔体到达D点的时刻不同.

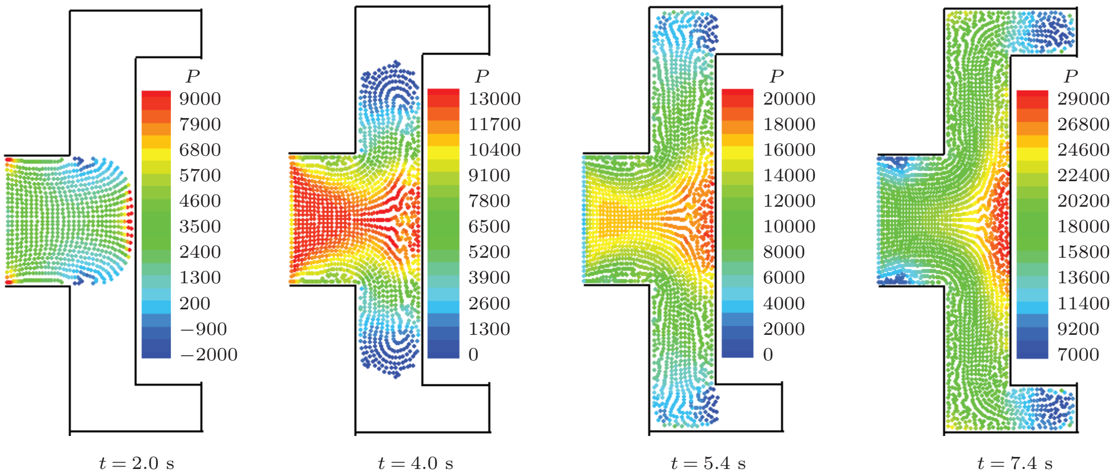


图14 (网刊彩色) 不同时刻的压力分布

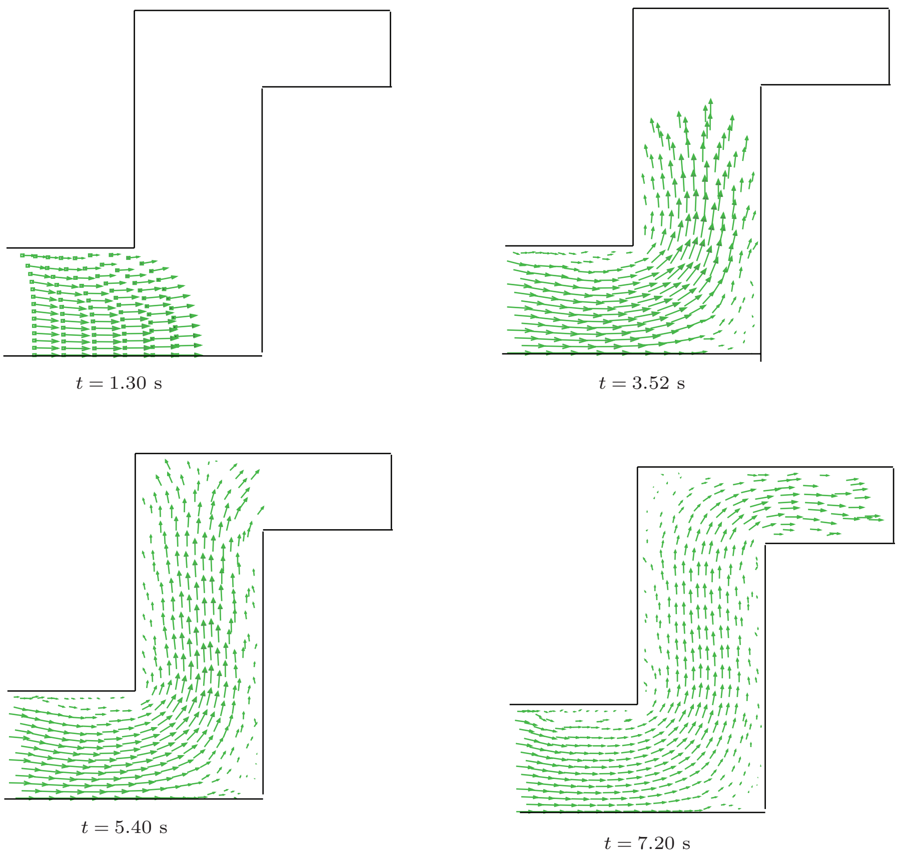


图15 (网刊彩色) 不同时刻的速度矢量

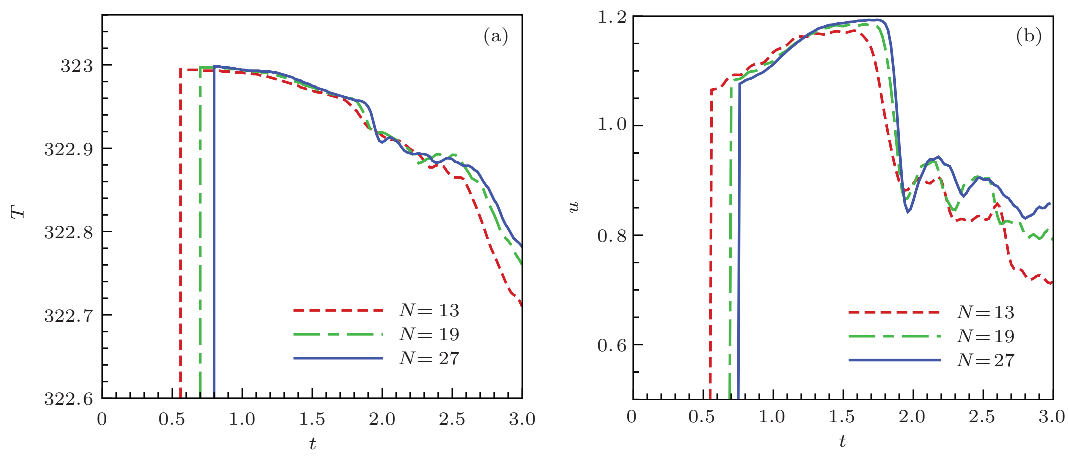


图 16　(网刊彩色) 不同粒子数下 D 点物理量　(a) 温度; (b) 速度 u

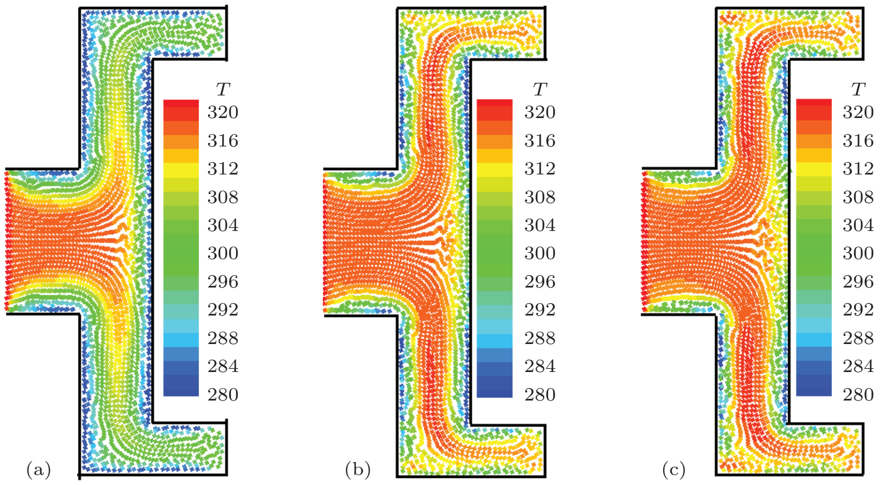


图 17　(网刊彩色) 不同 Pe 数下的温度分布　(a) $Pe = 100$; (b) $Pe = 1000$; (c) $Pe = 10000$

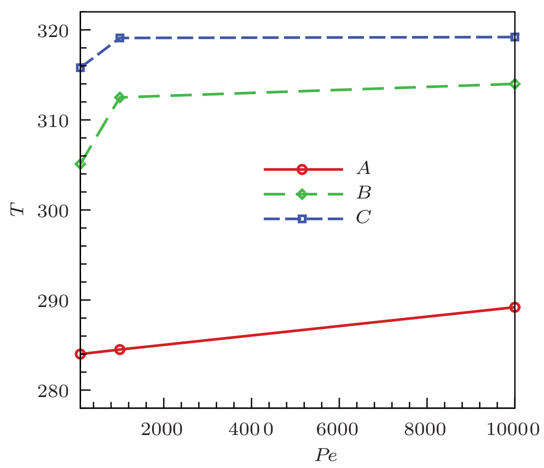


图 18　(网刊彩色) A, B, C 三点的温度值随 Pe 数的变化

图17给出了型腔充满时不同Pe数下的温度分布情况. 由图17可以看出, 随着 Pe 数的逐渐增加, 低温区域逐渐减少, 这是因为随着Pe数的增加, 对流导致的热交换代替热耗散引起的热交换而逐渐占据主导地位. 图18给出了A, B, C三点的温度值随Pe数的变化情况. 可以看出, A, B, C三点的温度值均随着Pe的增大而增加, 也验证了图17的结论.

6　结　论

针对非等温非牛顿黏性流体流动问题的模拟, 本文首先给出了一种能够准确、有效地模拟黏性聚合物流动问题的修正SPH方法, 同时建立了非牛顿黏性流体的SPH温度离散模型. 其次, 通过对Poiseuille流和喷射流问题的模拟, 验证了修正SPH方法模拟非牛顿黏性自由表面流动问题的可靠性; 通过对非等温Couette流和4:1收缩流问题的模拟, 验证了提出的SPH温度离散模型求解非

等温流动问题的有效性和准确性. 最后, 将修正SPH方法与SPH温度离散模型结合, 对环形腔和C形腔内非等温非牛顿黏性流体的流动过程进行了试探性模拟预测, 分析了数值模拟的收敛性, 讨论了不同位置处热流参数对温度和流动的影响. 本文结论如下:

1) 给出的修正SPH方法能够准确、有效地模拟非牛顿黏性流体流动问题, 且具有较好的收敛性;

2) 提出的改进SPH温度离散模型能够有效描述温度场的演化过程;

3) 将提出的修正SPH方法与SPH温度离散模型结合, 能够有效地模拟非等温情况下黏性聚合物熔体的充模过程, 并准确地捕捉到流动过程中的一些不稳定现象, 如喷射弯曲、回流等;

4) 型腔形状和热流参数对充模过程中宏观物理量的分布有重要影响, 且流体前沿界面的变化也与之相关;

5) 非等温聚合物熔体充模过程中, 热Peclet数对温度分布有重要影响, 且随流体注入型腔不同位置处的高温区域面积随Pe数的增大而扩大.

本文虽然在对SPH方法进行改进的基础上, 探索性地研究了非等温非牛顿流体流动问题, 然而本文主要通过数值模拟分析的手段对提出的改进方法的有效性和应用性进行了验证和推广, 其数值精度和稳定性的理论分析还有待进一步的研究探讨. 此外, 本文提出的改进方法涉及局部矩阵的求解, 将其应用于较大变形流动问题或对数值稳定性要求较高的黏弹性流动问题模拟时, 需特别注意流体边界附近由于矩阵奇异偶然性带来的精度低或模拟终止的问题, 为减少局部矩阵奇异性带来的数值缺陷可考虑对方法作进一步的修正. 后续期望将上述提出的改进方法或直接或间接耦合网格类方法(如耦合有限元法)推广应用于非牛顿多相流动问题的模拟, 并对其中出现的各种问题进行分析, 对方法的应用性做进一步的探讨和改善.

参考文献

[1] Hieber C A, Shen S F 1980 *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **7** 1

[2] Tao W Q 2006 *Heat Transfer* (Fourth Edition) (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [陶文铨 2006 传热学 (第四版)(北京: 高等教育出版社)]

[3] Han X H, Li X K 2007 *International Journal of Heat Mass Transfer* **50** 847

[4] Yang B X, Ouyang J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234602 (in Chinese) [杨斌鑫, 欧阳洁 2012 物理学报 **61** 234602]

[5] Lewis R W, Nithiarasu P, Seetharamu K N 2004 *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow* (Chichester: John Wiley)

[6] Pan Y, Suga K 2005 *Phys. Fluids* **17** 082105

[7] Jiang X, James A J 2007 *J. Engineer. Math.* **59** 99

[8] Tomé M F, Grossia L, Casteloa A, Cuminatoa J A, Mangiavacchia N, Ferreiraa V G, de Sousaa F S, McKeeb S 2004 *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **123** 85

[9] Zhong C W, Xie J F, Zhuo C S, Xiong S W, Yin D C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4083

[10] Cheng R J, Cheng Y M, Ge H X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4059

[11] Chen R J, Ge H X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090201

[12] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Mesh-free Particle Method* (Singapore: World Scientific)

[13] Liu M B, Liu G R 2010 *Archives of Computational Methods in Engineering* **17** 25

[14] Zhou G Z, Ge W, Li J H 2010 *Chemical Engineering Science* **65** 2258

[15] Su T X, Ma L Q, Liu M B, Chang J Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064702 (in Chinese) [苏铁熊, 马理强, 刘谋斌, 常建忠 2013 物理学报 **62** 064702]

[16] Han X H 2007 *Ph. D. Dissertation* (Dalian: Dalian University of Technology) (in Chinese) [韩先洪 2007 博士学位论文 (大连: 大连理工大学)]

[17] Jiang F, Oliveira M S A, Sousa A C M 2005 *M. T-wias. U. Werkstofftech* **10** 613

[18] Cleary P W, Ha J, Prakash M, Nguyen T 2010 *Applied Mathematical Modelling* **34** 2018

[19] Jiang T, Ouyang J, Li X J, Zhang L, Ren J L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090206 (in Chinese) [蒋涛, 欧阳洁, 栗雪娟, 张林, 任金莲 2011 物理学报 **60** 090206]

[20] Chen J K, Beraun J E 2000 *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **190** 225

[21] Liu M B, Chang J Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3654 (in Chinese) [刘谋斌, 常建忠 2010 物理学报 **59** 3654]

[22] Zhou G Z, Ge W, Li B, Li X, Wang P, Wang J, Li J H 2013 *Microfluidics and Nanofluidics* **15** 481

[23] Zhang M, Zhang S, Zhang H, Zheng L 2012 *Computers & Fluids* **59** 61

[24] Han Y W, Qiang H F, Zhao J L, Gao W R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044702 (in Chinese) [韩亚伟, 强洪夫, 赵久玲, 高巍然 2013 物理学报 **62** 044702]

[25] Jiang T, Lu L G, Lu W G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 224701 (in Chinese) [蒋涛, 陆林广, 陆伟刚 2013 物理学报 **62** 224701]

[26] Fan X J, Tanner R, Zheng R 2010 *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **165** 219

[27] Basa M, Quinlan N J, Lastiwka M 2009 *Int. J. Num. Meth. Flu.* **60** 1127

[28] Shao S, Lo E Y M 2003 *Advances in Water Resources* **26** 787

[29] Molteni D, Colagrossi A 2009 *Computer Physics Communications* **180** 861

[30] Rafiee A, Manzari M T, Hosseini M 2007 *International Journal of Non-linear Mechanics* **42** 1210

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 21 (2014) 210203

A corrected smoothed particle hydrodynamics approach to solve the non-isothermal non-Newtonian viscous fluid flow problems*

Jiang Tao† Ren Jin-Lian Xu Lei Lu Lin-Guang

(*Department of Mathematics, School of Hydraulic, Energy and Power Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

(Received 7 May 2014; revised manuscript received 11 June 2014)

Abstract

In this paper, a corrected smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is proposed to solve the problems of non-isothermal non-Newtonian viscous fluid. The proposed particle method is based on the corrected kernel derivative scheme under no kernel derivative and incompressible conditions, which possesses higher accuracy and better stability than the traditional SPH method. Meanwhile, a temperature-discretization scheme is deduced by the concept of SPH method for the purpose of precisely describing the evolutionary process of the temperature field. Reliability of the corrected SPH method for simulating the non-Newtonian viscous fluid flow is demonstrated by simulating the isothermal Poiseuille flow and the jet fluid of filling process; and the validity and accuracy of the proposed SPH discrete scheme in a temperature model for solving the non-isothermal fluid flow are tested by solving the non-isothermal Couette flow and 4:1 contraction flow. Subsequently, the proposed corrected SPH method combined with the SPH temperature-discretization scheme is tentatively extended to include the simulation of the non-isothermal non-Newtonian viscous free-surface flows in the ring-shaped and C-shaped cavities. Especially, the convergence of numerical simulations is analyzed, and the influences of heat flow parameters on the temperature and fluid flow at different positions are discussed.

Keywords: non-isothermal, viscosity fluid, smoothed particle hydrodynamics, thermo-viscosity model

PACS: 02.70.–c, 44.10.+i, 47.11.–j, 47.85.md **DOI:** 10.7498/aps.63.210203

* Project supported by the Postdoctoral Science Foundation of China (Grant No. 2014M550310), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51309200), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20130436), and the Innovation Cultivation Funds of Yangzhou University, China (Grant No. 2013CXJ003).

† Corresponding author. E-mail: jtrjl_2007@126.com