

# 离散修正 KdV 方程的解析近似解<sup>\*</sup>

杨 沛<sup>1)†</sup> 陈 勇<sup>2)</sup> 李志斌<sup>1)2)</sup>

1) (华东师范大学计算机科学技术系, 上海 200241)

2) (华东师范大学上海市高可信计算重点实验室, 上海 200062)

(2009 年 9 月 17 日收到; 2009 年 12 月 3 日收到修改稿)

将同伦分析法进行了推广, 使之适用于求解离散修正 KdV 方程. 获得了由指数函数表达的亮孤子解, 该解析近似解与精确解符合很好. 数值模拟结果说明了同伦分析法对求解复杂非线性问题的有效性和潜力.

**关键词:** 微分差分方程, 同伦分析法, 离散修正 KdV 方程, 孤立波解

**PACC:** 0340K, 0290

## 1. 引 言

微分差分方程 (DDE) 描述了物理学中许多重要的物理现象 (如晶格中的粒子振动、电子网络的电流流动、生物链中的神经脉冲等). 自从 20 世纪 50 年代 Fermi 等<sup>[1]</sup>对 DDE 的研究以来, 这方面的研究吸引了越来越多学者的注意, 并逐渐成为国际上一个新的研究热点和前沿. 关于 DDE 的求解及性质的相关内容可参阅文献[2—23].

同伦分析法<sup>[24]</sup>是目前构造非线性方程解析近似解最有效的方法之一, 它曾被成功地用来求解大量的非线性微分方程<sup>[24—46]</sup>. 然而, 就作者所知, 该方法求解 DDE 的报道似乎很少. 最近, Wang 等<sup>[45]</sup>获得了离散修正 Korteweg-de Vries (KdV) 方程多项式形式的钟形孤子解, Zou 等<sup>[46]</sup>求解了离散 KdV 方程并获得了其孤子解.

本文应用同伦分析法求解离散修正 KdV 方程, 获得由指数函数表达的亮孤子解. 由于选取了指数函数作为基函数, 与文献[45, 46]的结果相比较, 该解析近似解具有更高的精度和更大的收敛域, 对于任何  $n$  ( $n$  为离散的空间变量), 解的收敛域是  $-\infty < t < +\infty$  ( $t$  为时间变量) 与精确解符合很好. 数值模拟的结果说明了同伦分析法对求解复杂

非线性问题的有效性和潜力.

## 2. 同伦分析法求解离散修正 KdV 方程

离散修正 KdV 方程

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = (1 + u_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1}) \quad (1)$$

的亮孤子解为

$$u_n = \sinh(k) \operatorname{sech}[k(n - n_0) - \omega t], \quad (2)$$

其中  $n$  为离散的空间变量,  $t$  为连续的时间变量,  $\omega = -2\sinh(k)$ ,  $k$  和  $n_0$  为常数,  $k > 0$ . 下面我们将推导方程(1)的同伦级数解.

引入行波变换

$$\xi = n - ct, \quad (3)$$

其中  $c$  为任意常数. 此时方程(1)变为

$$-c \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} = [1 + u(\xi)^2][u(\xi + 1) - u(\xi - 1)]. \quad (4)$$

为简便起见, 我们取  $n_0 = 0$ , 根据孤子的对称性, 只考虑  $\xi \geq 0$  情况下的解. 假定

$$u(\xi) \approx B \exp(-k\xi) \quad (\xi \rightarrow +\infty), \quad (5)$$

其中  $k$  和  $B$  为常数,  $k > 0$ . 将(5)式代入(4)式并且平衡主要项, 得到

$$c = \frac{-2\sinh(k)}{k}. \quad (6)$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 10771072, 10735030, 90718041)、上海市重点学科建设工程 (批准号: B412) 和教育部长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT0734) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: pyang@cs.ecnu.edu.cn

作变换

$$\theta = k\xi, \tag{7}$$

(4)式变为

$$\begin{aligned} &2\sinh(k)\frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta} \\ &= [1 + u(\theta)^2][u(\theta + k) - u(\theta - k)]. \end{aligned} \tag{8}$$

为了简便,我们选取  $k = 1$ , 考虑如下的边值问题:

$$\begin{aligned} &u(\theta + 1) - u(\theta - 1) + u(\theta)^2 u(\theta + 1) \\ &- u(\theta)^2 u(\theta - 1) - 2\sinh(1)\frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

满足边界条件

$$\begin{aligned} &u(0) = \sinh(1), \\ &u(+\infty) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

作变换

$$u(\theta) = \sinh(1)v(\theta), \tag{11}$$

(9)式变为

$$\begin{aligned} &v(\theta + 1) - v(\theta - 1) + \sinh(1)^2 v(\theta)^2 v(\theta + 1) \\ &- \sinh(1)^2 v(\theta)^2 v(\theta - 1) - 2\sinh(1)\frac{\partial v(\theta)}{\partial \theta} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

满足边界条件

$$\begin{aligned} &v(0) = 1, \\ &v(+\infty) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

根据方程(12)和边界条件(13)式,  $v(\theta)$  用基函数

$$\{\exp(-m\theta) \mid m \geq 1\}$$

表示,即

$$v(\theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \exp(-m\theta), \tag{14}$$

其中  $\alpha_m$  为系数. 文献[24]指出,这提供了方程(12)的解表达.

根据(13),(14)式,选取

$$v_0(\theta) = \alpha \exp(-\theta) + (1 - \alpha) \exp(-2\theta) \tag{15}$$

作为  $v(\theta)$  的初始猜测解,其中  $\alpha$  为待定常数. 选取

$$L[G(\theta;q)] = \frac{\partial G(\theta;q)}{\partial \theta} + G(\theta;q) \tag{16}$$

作为辅助线性算子,该算子具有性质

$$L[C \exp(-\theta)] = 0, \tag{17}$$

其中  $C$  为系数. 我们构造零阶形变方程

$$(1 - q)L[G(\theta;q) - v_0(\theta)] = hqH(\theta)N[G(\theta;q)] \tag{18}$$

和边界条件

$$\begin{aligned} &G(0;q) = 1, \\ &G(+\infty;q) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

其中  $q$  为嵌入变量,  $q \in [0,1]$ ,  $h$  为辅助参数,  $h \neq 0$ ,  $H(\theta)$  为辅助函数,  $H(\theta) \neq 0$ . 由方程(12),定义非线性算子

$$\begin{aligned} &N[G(\theta;q)] \\ &= G(\theta + 1;q) - G(\theta - 1;q) \\ &\quad + \sinh(1)^2 G(\theta;q)^2 G(\theta + 1;q) \\ &\quad - \sinh(1)^2 G(\theta;q)^2 G(\theta - 1;q) \\ &\quad - 2\sinh(1)\frac{\partial G(\theta;q)}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{20}$$

为了满足解表达(14)式和系数遍历原则<sup>[24]</sup>,我们确定辅助函数

$$H(\theta) = \exp(-\theta). \tag{21}$$

显然,当  $q = 0$  时,方程(18)和(19)的解为

$$G(\theta;0) = v_0(\theta). \tag{22}$$

当  $q = 1$  时,方程(18)和(19)等同于原始方程(12)和(13),从而

$$G(\theta;1) = v(\theta). \tag{23}$$

当  $q$  从 0 变化到 1 时,  $G(\theta;q)$  从初始猜测解  $v_0(\theta)$  变化至方程(12)和(13)的精确解  $v(\theta)$ . 假设  $h$  和  $H(\theta)$  选取合适,零阶形变方程(18)和(19)对所有  $q \in [0,1]$  有解,而且

$$v_m(\theta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m G(\theta;q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \tag{24}$$

对  $m \geq 1$  都存在,那么,利用泰勒展开定理和(15)式,  $G(\theta;q)$  展开成  $q$  的幂级数,即

$$G(\theta;q) = v_0(\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} v_m(\theta) q^m. \tag{25}$$

此外,假设  $h$  和  $H(\theta)$  选取合适,使得幂级数在  $q = 1$  时收敛,由(23)和(25)式得到级数解

$$v(\theta) = v_0(\theta) + \sum_{m=1}^{+\infty} v_m(\theta). \tag{26}$$

定义向量

$$\mathbf{V}_k = \{v_0(\theta), v_1(\theta), \dots, v_k(\theta)\}. \tag{27}$$

将零阶形变方程(18)和(19)对  $q$  求导  $m$  次,再除以  $m!$ ,最后令  $q = 0$ ,我们得到高阶形变方程

$$\begin{aligned} &L[v_m(\theta) - \chi_m v_{m-1}(\theta)] = hH(\theta)R_m(\mathbf{V}_{m-1}) \\ &(m \geq 1) \end{aligned} \tag{28}$$

和边界条件

$$v_m(0) = v_m(+\infty) = 0. \tag{29}$$

这里

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & (m = 1), \\ 1 & (m > 1), \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &R_m(\mathbf{V}_{m-1}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[G(\theta; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \\ &= v_{m-1}(\theta + 1) - v_{m-1}(\theta - 1) \\ &\quad + \sinh(1)^2 \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i}(\theta + 1) \sum_{j=0}^i v_j(\theta) v_{i-j}(\theta) \\ &\quad - \sinh(1)^2 \sum_{i=0}^{m-1} v_{m-1-i}(\theta - 1) \sum_{j=0}^i v_j(\theta) v_{i-j}(\theta) \\ &\quad - 2\sinh(1) \frac{\partial v_{m-1}(\theta)}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{31}$$

由(17)式,容易获得线性方程(28)的解

$$v_m(\theta) = \chi_m v_{m-1}(\theta) + v^*(\theta) + C \exp(-\theta), \tag{32}$$

其中  $v^*(\theta)$  是一个特解,积分常数  $C$  可以通过边界条件(29)式确定. 借助 Maple 计算机代数系统,我们获得了方程(12)的四阶近似解

$$v(\theta) \approx \sum_{m=0}^4 v_m(\theta). \tag{33}$$

方程(12)的精确解为

$$v(\theta) = \operatorname{sech}(\theta). \tag{34}$$

由(11)式,我们有方程(9)和(10)的解

$$u(\theta) = \sinh(1)v(\theta), \tag{35}$$

其中  $\theta \geqslant 0$ . 由孤子解的对称性可知

$$u(\theta) = \sinh(1)v(-\theta), \tag{36}$$

其中  $\theta \leqslant 0$ . 根据变换(7)式和行波变换(3)式,当  $k = 1$  时,我们可获得方程(1)的解. 由(35)式得

$$u_n = \sinh(1)v(n - ct), \tag{37}$$

其中  $c = -2\sinh(1)$ ,  $t \geqslant n/c$ . 由(36)式得

$$u_n = \sinh(1)v(-n + ct), \tag{38}$$

其中  $c = -2\sinh(1)$ ,  $t \leqslant n/c$ .

类似地,对任何  $k > 0$ , 我们都能获得方程(1)的级数解.

3. 结果分析

通过上述过程,我们获得了一个四阶截断的级数解(33)式,为了说明该解的近似程度,不妨与精确解(34)式作一比较. 在级数解(33)式中含有辅助参数  $h$  和参数  $\alpha$ . 我们需要选取这两个参数合适的

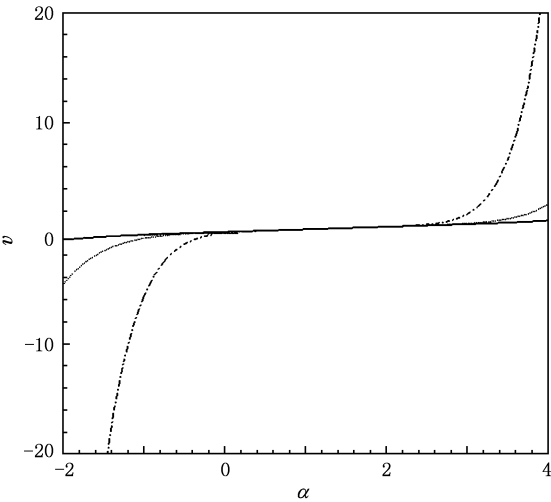


图 1 当  $k=1$  和  $\theta=1$  时,由(33)式得到的级数解  $v(\theta)$  随  $\alpha$  的变化 实线为  $h=0.0001$ , 点线为  $h=0.0002$ , 点划线为  $h=0.0004$

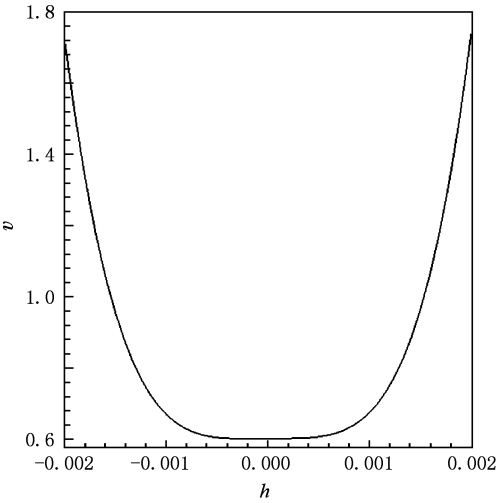


图 2 当  $k=1, \alpha=2$  和  $\theta=1$  时,由(33)式得到的级数解  $v(\theta)$  随  $h$  的变化

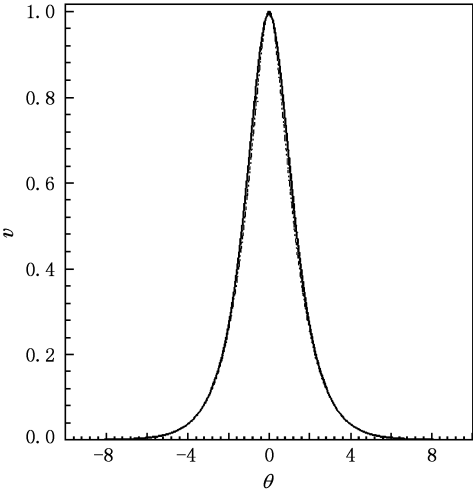


图 3 当  $\alpha=2$  和  $h=0.0004$  时,方程(12)的级数解与精确解的比较 实线为精确解((34)式), 点划线为级数解((33)式)

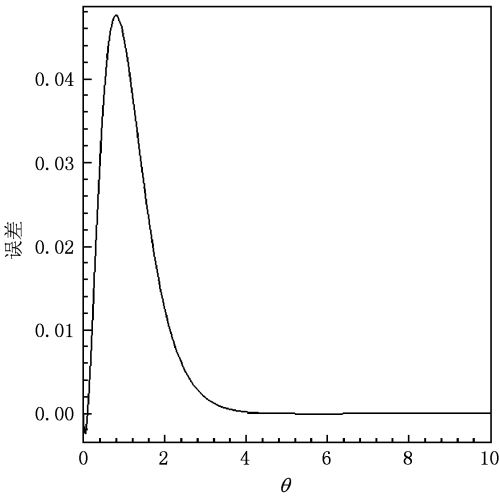


图 4  当  $\alpha = 2$  和  $h = 0.0004$  时, 级数解 ((33) 式) 与精确解 ((34) 式) 之间的误差

值来保证级数解的收敛. 当  $\theta = 1$  时, 研究  $\alpha$  对级数解  $v(1)$  的收敛域的影响来确定  $\alpha$  的合适取值范围为  $1.5 \leq \alpha \leq 2.5$ , 结果如图 1 所示. 经过一些尝试, 发现  $\alpha = 2$  能够很好地保证级数解收敛至精确解. 我们绘制了  $v(\theta)-h$  的曲线来确定  $h$  的有效区域(图 2). 显然, 我们选取了  $\alpha = 2$  和  $h = 0.0004$  来保证级数解与精确解符合很好, 见图 3. 图 4 表明了四阶级数解 (33) 式与精确解 (34) 式之间的误差. 当  $n = 1, 2$  时, 方程 (1) 的级数解  $u_n$  与精确解 (2) 式在  $-\infty < t < +\infty$  内符合很好, 见图 5. 对于任何  $n$ , 我们都能获得与精确解符合得很好的级数解. 以上的数值模拟结果说明, 同伦分析法能够获得离散修正 KdV 方程更高精度和更大收敛域的级数解.

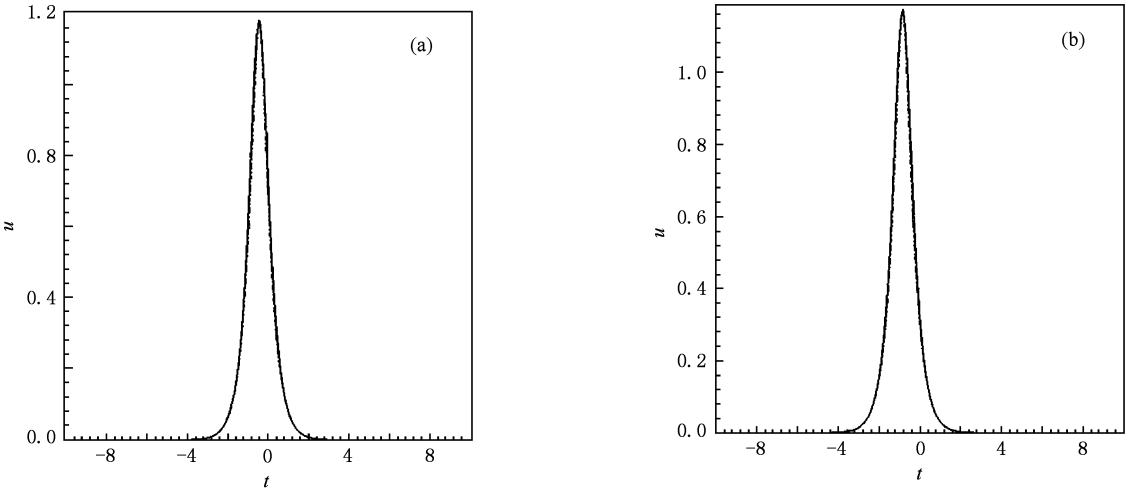


图 5  当  $k = 1$  和  $n_0 = 0$  时, 方程 (1) 的四阶级数解与精确解的比较  实线为精确解, 点划线为级数解. (a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$

4. 结    论

通过上述方法成功地将同伦分析法应用于求解离散修正 KdV 方程, 解决了方程中离散空间变量  $n$  不同于连续方程中的变量问题. 通过数值模拟验证了获得的解析近似解与精确解符合很好. 在本文

的研究中, 合理地选取基函数和通过多次尝试调整初始猜测解是获得该方程较高精度同伦级数解的关键. 通过图形可以看出, 同伦分析法对求解复杂非线性问题的有效性和潜力. 一般而言, 大部分的 DDE 很难求出精确解. 所以, 通过同伦分析法获得科学和工程方面的 DDE 解析近似解是一个很好的途径.

[1]  Fermi E, Pasta J, Ulam S 1965 *Collected Papers of Enrico Fermi* ( II ) (Chicago: University of Chicago Press) p1

[2]  Suris Y B 1997 *J. Phys. A* **30** 1745

[3]  Suris Y B 1999 *Rev. Math. Phys.* **11** 727

[4]  Suris Y B 2003 *The Problem of Integrable Discretization; Hamiltonian Approach, Progress in Mathematics* ( Vol. 219 ) (Basel: Birkhäuser-Verlag) p1

[5]  Blaszak M, Marciniak K 1994 *J. Math. Phys.* **35** 4661

[6] Belov A A, Chaltikian K D 1993 *Phys. Lett. B* **309** 268

[7] Hu X B, Zhu Z N 1998 *J. Phys. A* **31** 4755

[8] Hu X B, Zhu Z N 1998 *J. Math. Phys.* **39** 4766

[9] Ma W X, Hu X B, Zhu S M, Wu Y T 1999 *J. Math. Phys.* **40** 6071

[10] Zhang D J 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1333

[11] Sun Y P, Chen D Y, Xu X X 2006 *Phys. Lett. A* **359** 47

[12] Zhu J, Geng X 2007 *Phys. Lett. A* **368** 464

[13] Hu X B, Wu Y T 1998 *Phys. Lett. A* **246** 523

[14] Chou K S, Qu C Z 2001 *Phys. Lett. A* **280** 303

[15] Luo L, Fan E G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1444

[16] Zhang W, Huang Y Z, Xiao Y 1998 *Phys. Rev. E* **57** 7358

[17] Xiao Y, Hai W H 1994 *J. Phys. A* **27** 6873

[18] Chow K W 1994 *Phys. Scr.* **50** 233

[19] Shek E C M, Chow K W 2008 *Chaos Solitons Fract.* **36** 296

[20] Yang P, Chen Y, Li Z B 2009 *Appl. Math. Comput.* **210** 362

[21] Yang P, Chen Y, Li Z B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3953

[22] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5894 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5894]

[23] Zhang S Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1870 (in Chinese) [张善卿 2007 物理学报 **56** 1870]

[24] Liao S J 2003 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press) p1

[25] Liao S J 2002 *J. Fluid Mech.* **453** 411

[26] Liao S J 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 1173

[27] Liao S J 2003 *J. Fluid Mech.* **488** 189

[28] Liao S J 2003 *Appl. Math. Comput.* **144** 495

[29] Liao S J 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 271

[30] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499

[31] Wu Y Y, Wang C, Liao S J 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1733

[32] Wu W, Liao S J 2005 *Chaos Solitons Fract.* **26** 177

[33] Liao S J 2009 *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* **14** 983

[34] Liao S J 2009 *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* **14** 2144

[35] Liao S J, Tan Y 2007 *Stud. Appl. Math.* **119** 297

[36] Abbasbandy S, Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fract.* **36** 581

[37] Abbasbandy S 2009 *Chaos Solitons Fract.* **39** 428

[38] Liu Y P, Li Z B 2008 *Z. Naturforsch. A* **63** 241

[39] Liu Y P, Li Z B 2009 *J. Phys. A* **42** 125205

[40] Liu Y P, Li Z B 2009 *Chaos Solitons Fract.* **39** 1

[41] Yang H J, Shi Y R, Duan W S, Lü K P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3064 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2007 物理学报 **56** 3064]

[42] Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6791 (in Chinese) [石玉仁、汪映海、杨红娟、段文山 2007 物理学报 **56** 6791]

[43] Shi Y R, Xu X J, Wu Z X, Wang Y H, Yang H J, Duan W S, Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吕克璞 2006 物理学报 **55** 1555]

[44] Xu W, Sun Z K, Yang X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5069 (in Chinese) [徐伟、孙中奎、杨晓丽 2005 物理学报 **54** 5069]

[45] Wang Z, Zou L, Zhang H Q 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1373

[46] Zou L, Zong Z, Wang Z, He L 2007 *Phys. Lett. A* **370** 287

# Analytic approximation for the soliton solution of the discrete modified KdV equation<sup>\*</sup>

Yang Pei<sup>1)†</sup>   Chen Yong<sup>2)</sup>   Li Zhi-Bin<sup>1)2)</sup>

1) (*Department of Computer Science and Technology, East China Normal University, Shanghai 200241, China*)

2) (*Key Laboratory of Trustworthy Computing of Shanghai, East China Normal University, Shanghai 200062, China*)

(Received 17 September 2009; revised manuscript received 3 December 2009)

## Abstract

We extend the homotopy analysis method to solving the discrete modified KdV equation. The bright soliton solution expressed by a series of exponential functions is obtained, which agrees well with the exact solution. It indicates the validity and great potential of the homotopy analysis method in solving complicated nonlinear problems.

**Keywords:** differential-difference equation, homotopy analysis method, discrete modified KdV equation, solitary wave solution

**PACC:** 0340K, 0290

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10771072, 10735030, 90718041), the Foundation of Priority Academic Discipline of Shanghai, China (Grant No. B412) and the Cheung Kong Scholars and Innovative Research Team Program in University of Ministry of Education, China (Grant No. IRT0734).

<sup>†</sup> E-mail: pyang@cs.ecnu.edu.cn