

Birkhoff 意义下 Hénon-Heiles 方程的离散变分计算*

刘世兴¹⁾²⁾ 刘畅¹⁾ 郭永新^{2)†}

1) (北京理工大学力学系, 北京 100081)

2) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

(2010 年 8 月 25 日收到; 2010 年 9 月 27 日收到修改稿)

在 Birkhoff 意义下研究了非线性不可积 Hamilton 系统——Hénon-Heiles 方程的离散变分计算方法, 并和辛算法及 Runge-Kutta 方法相比较, 说明在 Birkhoff 意义下采用离散变分算法研究非线性不可积系统的动力学行为是合理和可行的.

关键词: Hénon-Heiles 方程, 离散变分方法, 自治 Birkhoff 方程

PACS: 45.20.Jj

1. 引言

Hénon-Heiles 方程是一类非线性不可积 Hamilton 系统^[1], 广泛应用于天体力学^[2]、统计力学^[3]和量子力学中^[4]. 它在各种情况下的解法是当前数学和物理研究中的重点内容^[5-10]. Hamilton 系统是 Birkhoff 系统的特殊情况, Birkhoff 方程是动力系统更一般的描述^[11-14], 在 Birkhoff 意义下研究非线性动力学系统具有更一般的意义. 本文首先给出离散 Birkhoff 方程, 然后在 Birkhoff 意义下将 Hénon-Heiles 方程离散化, 求其离散变分方程, 最后通过求解离散变分方程, 从而得到 Hénon-Heiles 方程的动力学性质.

为书写简洁和方便起见, 本文采用 Einstein 求和约定, 并对指标取值范围作如下规定: $\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n$.

2. 离散自治 Birkhoff 方程

设 Birkhoff 函数 $B: M^{2n} \rightarrow R$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\nu: M^{2n} \rightarrow R$, 则 Pfaff 函数 $P(a, \dot{a})$ 可以表示为

$$P(a, \dot{a}) = R_\nu(a) \dot{a}^\nu - B(a). \quad (1)$$

定义 Pfaff 作用量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(a, \dot{a}) dt. \quad (2)$$

这里 $a^\nu = a^\nu(t)$ 是构型空间中的 C^2 曲线. 通过对作用量 A 进行变分计算, 取 $a^\nu(t)$ 的端点固定, 即 $\delta a^\nu(t_1) = \delta a^\nu(t_2) = 0$, 并令 $\delta A = 0$, 则可以得到自治 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} = 0. \quad (3)$$

取离散空间为 R^{2n} , 定义离散 Pfaff 函数为 $P_d: R^{2n} \rightarrow R^{2n}$, 引入时间步长 $h \in R$, 则离散 Pfaff 函数变为 $P_d: R^{2n} \times R \rightarrow R^{2n}$. 定义离散 Pfaff 函数为^[14]

$$A_d(a_d^\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} P_d(a_k^\nu, a_{k+1}^\nu, h). \quad (4)$$

利用离散 Pfaff-Birkhoff 原理

$$\delta A_d(a_d^\nu) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} P_d(a_k^\nu, a_{k+1}^\nu, h) = 0, \quad (5)$$

$$\delta a_0^\nu = \delta a_N^\nu = 0,$$

得到离散自治 Birkhoff 方程

$$D_2 P_d(a_{k-1}^\nu, a_k^\nu, h) + D_1 P_d(a_k^\nu, a_{k+1}^\nu, h) = 0. \quad (6)$$

这里 $D_i P_d$ ($i = 1, 2$) 表示对 P_d 中第 i 个变量的偏导数. 取

$$b_k^\nu = -D_1 P_d(a_k^\nu, a_{k+1}^\nu, h), \quad (7)$$

$$b_{k+1}^\nu = D_2 P_d(a_k^\nu, a_{k+1}^\nu, h) \quad (8)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10932002, 10872084)、辽宁省高等学校科研基金(批准号:2008S098)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划(批准号:2008RC20)、辽宁省重点实验室建设计划(批准号:2008403009)、辽宁大学青年科研基金(批准号:2008LDQN04)和辽宁省教育厅科研计划(批准号:L2010147)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

作为中间变量,通过求解隐式方程(7)可以得到 a_{k+1}^v , 然后求解显式方程(8)得到 b_{k+1}^v , 从而得到 $(a_k^v, b_k^v) \rightarrow (a_{k+1}^v, b_{k+1}^v)$ 的演化.

利用 Störmer-Verlet 格式^[15-17], 可以定义离散 Pfaff 函数

$$\begin{aligned} P_d(a_k^v, a_{k+1}^v, h) \\ = hP[a_k^v, (a_{k+1}^v - a_k^v)/h]/2 \\ + hP[a_{k+1}^v, (a_{k+1}^v - a_k^v)/h]/2. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Hénon-Heiles 方程的离散化及数值仿真

本文研究最简单的 Hénon-Heiles 方程

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy, \\ \ddot{y} &= -y + y^2 - x^2. \end{aligned} \quad (10)$$

该系统的总能量守恒

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &+ \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3). \end{aligned} \quad (11)$$

取 $a^1 = x, a^2 = y, a^3 = \dot{x}, a^4 = \dot{y}$, 令 $B = E, R_1 = R_2 = 0, R_3 = -a^1, R_4 = -a^2$, 则 Hénon-Heiles 方程(10)具有如下的 Paff 形式^[13]:

$$\begin{aligned} P &= (-a^1)\dot{a}^3 + (-a^2)\dot{a}^4 - \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2 \\ &+ (a^3)^2 + (a^4)^2 + 2a^2(a^1)^2 \\ &- \frac{2}{3}(a^2)^3]. \end{aligned} \quad (12)$$

由(9)式可得离散化的 Pfaff 函数为

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{h}{2}[-a_k^1(a_{k+1}^3 - a_k^3)/h - a_k^2(a_{k+1}^4 - a_k^4)/h] \\ &- \frac{h}{2}[(a_k^1)^2 + (a_k^2)^2 + (a_k^3)^2 \\ &+ (a_k^4)^2 + 2a_k^2(a_k^1)^2 - \frac{2}{3}(a_k^2)^3] \\ &+ \frac{h}{2}[-a_{k+1}^1(a_{k+1}^3 - a_k^3)/h \\ &- a_{k+1}^2(a_{k+1}^4 - a_k^4)/h] \\ &- \frac{h}{2}[(a_{k+1}^1)^2 + (a_{k+1}^2)^2 \\ &+ (a_{k+1}^3)^2 + (a_{k+1}^4)^2 \\ &+ 2a_{k+1}^2(a_{k+1}^1)^2 - \frac{2}{3}(a_{k+1}^2)^3]. \end{aligned} \quad (13)$$

利用中间变量(7)和(8)式,得到

$$\begin{aligned} b_k^1 &= (a_{k+1}^3 - a_k^3)/2 + ha_k^1(1 + 2a_k^2), \\ b_k^2 &= (a_{k+1}^4 - a_k^4)/2 + h[a_k^2(1 - a_k^2) + (a_k^1)^2], \\ b_k^3 &= -a_k^1/2 + ha_k^3 - a_{k+1}^1/2, \\ b_k^4 &= -a_k^2/2 + ha_k^4 - a_{k+1}^2/2, \\ b_{k+1}^1 &= -(a_{k+1}^3 - a_k^3)/2 - ha_{k+1}^1(1 + 2a_{k+1}^2), \\ b_{k+1}^2 &= -(a_{k+1}^4 - a_k^4)/2 \\ &- h[a_{k+1}^2(1 - a_{k+1}^2) + (a_{k+1}^1)^2], \\ b_{k+1}^3 &= -a_k^1/2 - ha_{k+1}^3 - a_{k+1}^1/2, \\ b_{k+1}^4 &= -a_k^2/2 - ha_{k+1}^4 - a_{k+1}^2/2. \end{aligned}$$

利用 b_k^v 可以求得 a_{k+1}^v 的表达式

$$\begin{aligned} a_{k+1}^1 &= -a_k^1 + 2ha_k^3 - 2b_k^3, \\ a_{k+1}^2 &= -a_k^2 + 2ha_k^4 - 2b_k^4, \\ a_{k+1}^3 &= a_k^3 + 2b_k^1 - 2ha_k^1 \\ &- 4ha_k^2a_k^1, \\ a_{k+1}^4 &= a_k^4 + 2b_k^2 - 2ha_k^2 \\ &- 2h(a_k^1)^2 + 2h(a_k^2)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

利用 $b_{k+1}^v + b_k^v$ 或 $b_{k+1}^v - b_k^v$, 整理得到 b_{k+1}^v 的表达式

$$\begin{aligned} b_{k+1}^1 &= -b_k^1 + h(a_k^1 - a_{k+1}^1) \\ &+ 2h(a_k^2a_k^1 - a_{k+1}^2a_{k+1}^1), \\ b_{k+1}^2 &= -b_k^2 + h(a_k^2 - a_{k+1}^2) \\ &+ h[(a_k^1)^2 - (a_{k+1}^1)^2] \\ &- h[(a_k^2)^2 - (a_{k+1}^2)^2], \\ b_{k+1}^3 &= b_k^3 - h(a_k^3 + a_{k+1}^3), \\ b_{k+1}^4 &= b_k^4 - h(a_k^4 + a_{k+1}^4). \end{aligned} \quad (15)$$

选择适当的初始条件,如取 $E = 0.125$, 对(14), (15)式进行数值仿真,则得到 Hénon-Heiles 方程的解. 这里采用 Runge-Kutta 方法、辛算法和离散变分 Birkhoff 方法计算了 Hénon-Heiles 系统的总能量和空间轨迹,所得结果如图 1 和图 2 所示.

从图 1 中可以看出,采用本文的算法和辛算法所得计算结果的误差很小,能够保持系统的总能量守恒,符合问题的实际情况. 从图 1 中还可看出,本文方法比辛算法的结果更加精确. 而采用 Runge-Kutta 方法所得总能量迅速发散. 这说明本文的计算方法是合理而有效的. 从图 2 可以看出,本文算法和辛算法所得空间轨迹基本相同,而 Runge-Kutta 方法给出的空间轨迹不符合实际情况. 以上分析说明在 Birkhoff 意义下采用离散变分算法研究非线性不可积系统的动力学行为是合理且可行的.

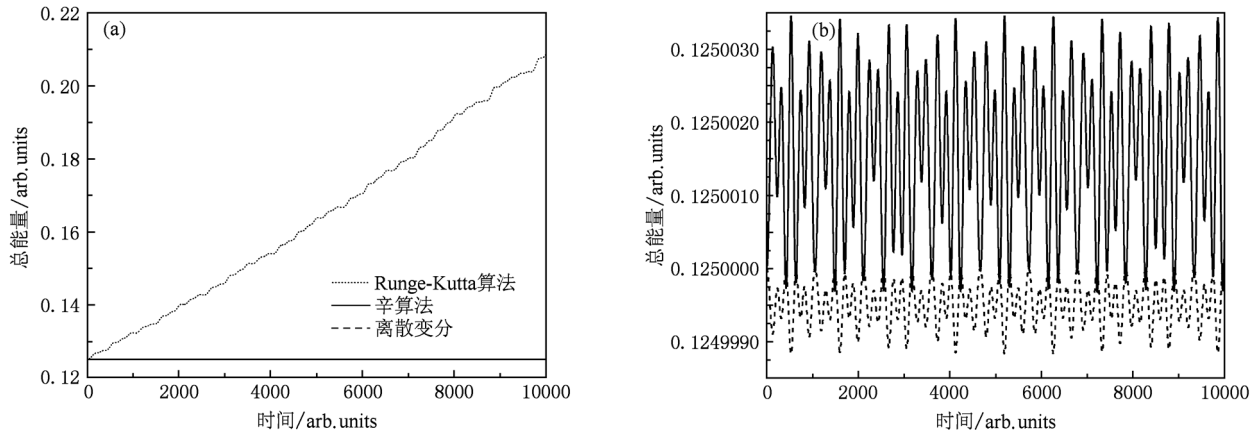


图1 (a)利用3种方法计算得到的 Hénon-Heiles 系统总能量,(b)为(a)图局部放大

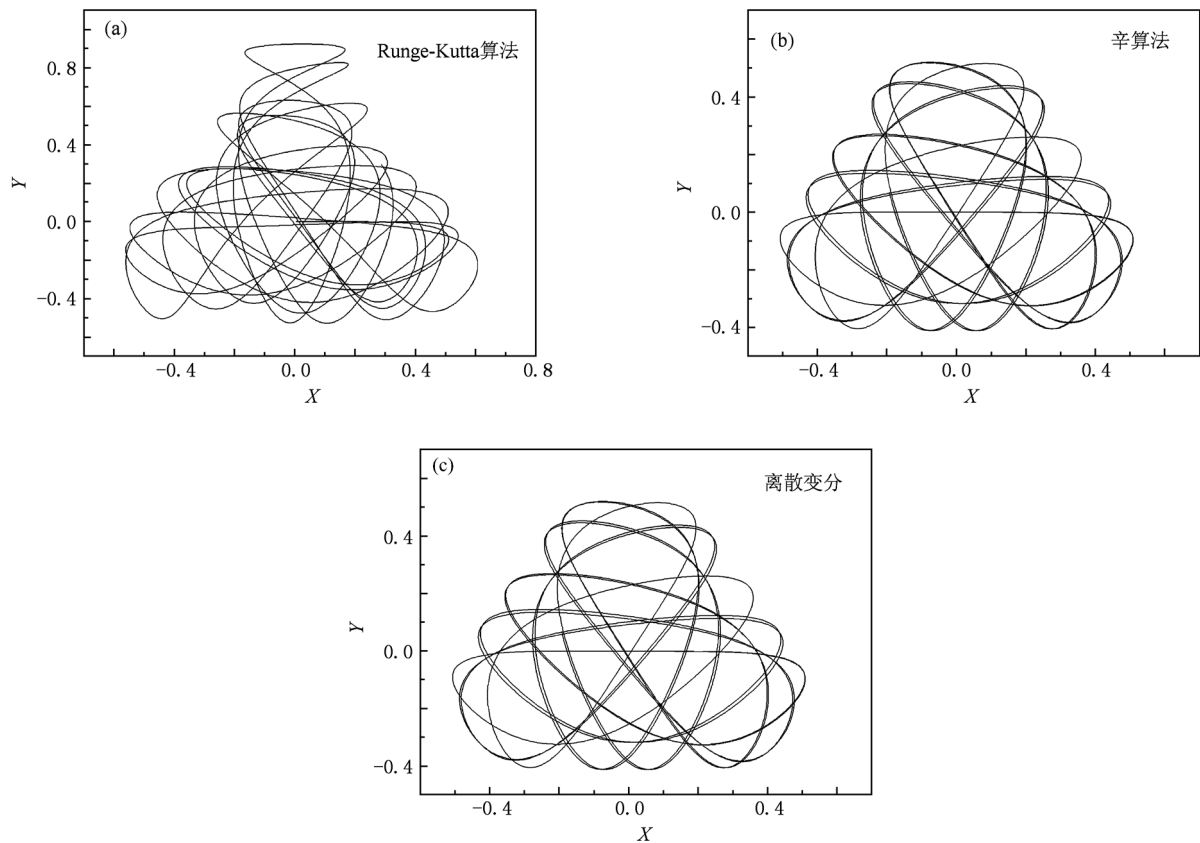


图2 利用3种方法计算得到的 Hénon-Heiles 方程的解曲线 (a) Runge-Kutta 算法,(b)辛算法,(c)离散变量算法

4. 结 论

在 Birkhoff 意义下研究了非线性不可积

Hamilton 系统——Hénon-Heiles 方程的离散变分计算方法,并和辛算法及 Runge-Kutta 算法相比较,说明在 Birkhoff 意义下采用离散变分算法研究非线性不可积系统的动力学行为是合理和可行的.

- [1] Gleick J 1988 *Chaos: Making a New Science* (New York: Penguin Books)
- [2] Hénon M, Heiles C 1964 *J. Astronom.* **69** 73
- [3] Maciejewski A J, Przybylska M 2004 *Phys. Lett. A* **327** 461
- [4] Morales-Ruiz J J, Simó C, Simon S 2005 *Ergod. Ther. Dynam. Syst.* **25** 1237
- [5] Morales-Ruiz J J, Ramis J P, Simon S 2007 *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure* **40** 845
- [6] Wen S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5209 (in Chinese) [温淑焕 2009 物理学报 **58** 5209]
- [7] Li S J, Peng S J 2009 *Sci. Chin. A* **52** 2185
- [8] Liu F C, Zhang Y L, Chen C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2784 (in Chinese) [刘福才, 张彦柳, 陈超 2008 物理学报 **57** 2784]
- [9] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence: American Mathematics Society College Publications)
- [10] Li Y M, Mei F X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5930 (in Chinese) [李彦敏, 梅凤翔 2010 物理学报 **59** 5930]
- [11] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics* (New York: Springer)
- [12] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics* (New York: Springer)
- [13] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoff Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press)
- [14] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030302
- [15] Marsden J E, West M 2001 *Acta Numerica* (Vol. 10) (Cambridge: University of Cambridge) p357
- [16] Hairer E, Lubich C, Wanner G 2002 *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* (Vol. 31) (Berlin: Springer)
- [17] Cortés J 2002 *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems* (Berlin: Springer)

Discrete variational calculation of Hénon-Heiles equation in the Birkhoffian sense^{*}

Liu Shi-Xing¹⁾²⁾ Liu Chang¹⁾ Guo Yong-Xin^{2)†}

1) (Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

2) (College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

(Received 25 August 2010; revised manuscript received 27 September 2010)

Abstract

The Hénon-Heiles equation that is nonlinear nonintegrable Hamilton system is studied by using the method of discrete variational calculation in the Birkhoffian sense. And the result from the method is compared with the result obtained by using symplectic algorithm and Runge-Kutta method, indicating that the method presented in this paper is reasonable and feasible in computing the dynamical action of the nonlinear nonintegrable Hamilton system in the Birkhoffian sense.

Keywords: Hénon-Heiles equation, discrete variational method, autonomous Birkhoff equation

PACS: 45.20.Jj

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 10872084), the Scientific Research Foundation of Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008S098), the Program of Excellent Talents in Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008RC20), the Program of Constructing Key Laboratory of Liaoning Province, China (Grant No. 2008403009), the Foundation for Youth Teachers of Liaoning University, China (Grant No. 2008LDQN04), and the Scientific Research Program of the Education Bureau of Liaoning Province, China (Grant No. L2010147).

[†] Corresponding author. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn